DIE AUFLÖSUNG DER NUMERISCHEN GLEICHUNGEN NACH FOURIER

INAUGURALDISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT
ZU FREIBURG IM BREISGAU

VORGELEGT VON

PETER MONTFORT
AUS ZELL I. W.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1910

DEKAN: Geheimerat Professor Dr. J. LÜROTH
REFERENT: Ebenderselbe.

MEINEN ELTERN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543126_0115

Einleitung.

In seiner „Analyse des équations déterminées“, deutsche Ausgabe von A. Loewy in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 127, Seite 181 u. f. hat Fourier zuerst die nach ihm benannte Methode der Fourierschen oder geordneten Division angegeben und weiter gezeigt, wie man von ihr bei der Auflösung numerischer Gleichungen Gebrauch machen kann. Fourier selbst hat keinen Beweis für die Richtigkeit seiner Divisionsmethode gegeben, sondern sich begnügt anzuführen, wie man ihn erbringen kann. Ebensowenig hat er sich damit befaßt, nachzuweisen, daß sein Verfahren bei der Auflösung numerischer Gleichungen richtig zum Ziele führt.

Eine genaue Darstellung der geordneten Division findet sich bei Lüroth: „Vorlesungen über numerisches Rechnen“, Leipzig, B. G. Teubner 1900, Seite 38—55. Ebenda (siehe Seite 145—157) wird auch die Ausziehung der Quadratwurzel und die Auflösung einer Gleichung zweiten Grades nach Fourier vollkommen durchgeführt.

Im vorliegenden Aufsatz soll nach diesen Prinzipien allgemein die Gleichung

$$x^m + b'x^{m-1} + b''x^{m-2} + \cdots + b^{(m-1)}x - a = 0$$

behandelt werden. Es wird gezeigt, welche Gesichtspunkte man bei der Auflösung zu beachten hat, und wie sich die Berechnung der Wurzel gestaltet.

Eine genaue Diskussion wird sich an die speziellen Gleichungen

$$x^m = a \quad \text{sowie} \quad x^m + bx^n = a$$

anschließen, insofern als für diese Gleichungen eine Reihe von Ungleichungen aufgestellt werden, die dazu dienen können, die Richtigkeit des gefundenen Wertes für x zu beurteilen, wie dies für die Ausziehung der Quadratwurzel und die Gleichung zweiten Grades bei „Lüroth“ (siehe Seite 149 und folgende) geschehen ist.

Lüroth: „Vorlesungen über numerisches Rechnen“, B. G. Teubner, Leipzig 1900, worauf öfters hingewiesen wird, sei in der Folge kurz durch „Lüroth“ zitiert.

Desgleichen ist Fourier: „Analyse des équations determinées“, deutsche Ausgabe von A. Loewy, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 127, gemeint, wenn von „Fourier“ die Rede ist.

Herrn Professor Dr. A. Loewy, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke und der mich jederzeit freundlichst mit Rat und Hilfe unterstützte, spreche ich auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus.

Ebenso fühle ich mich Herrn Geheimerat Professor Dr. J. Lüroth gegenüber, dessen Heimgang leider während der Drucklegung der vorliegenden Arbeit zu beklagen ist, für sein stets liebenswürdiges Entgegenkommen sehr verpflichtet.

Bestimmung der reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung nach Fourier.

§ 1.

Einleitende Bemerkungen.

Gegeben sei die Gleichung:

$$(1) \qquad f(x) = x^m + b'x^{m-1} + b''x^{m-2} + \cdots + b^{(m-1)}x - a = 0,$$

deren reelle Wurzeln wir bestimmen wollen. Die Größen $b', b'', b''', \ldots b^{(m-1)}$, sowie a sind beliebige endliche reelle Zahlen, die selbstredend nicht sämtlich 0 sind. Wir können annehmen, es sei $a \neq 0$; denn sollte $a = 0$ sein, so kann man durch Division mit einer gewissen Potenz von x zu einer Gleichung gelangen, in der das Absolutglied von Null verschieden ist.

Wir setzen voraus, daß Gleichung (1) mindestens eine reelle Wurzel habe und daß sie von mehrfachen Wurzeln befreit sei. Ferner seien zwei reelle Zahlen C_0 und $\bar{C}_0$ bekannt, zwischen denen eine und nur eine Wurzel von $f(x) = 0$ liegt, infolgedessen ist:

$$\operatorname{sgn} f(C_0) \neq \operatorname{sgn} f(\bar{C}_0),$$

wobei sgn als Abkürzung von signum Vorzeichen bedeutet.

Überdies machen wir die weitere Voraussetzung, daß C_0 eine von Null verschiedene rationale Zahl sei.

Da wir uns auf die Untersuchung der positiven reellen Wurzeln beschränken können — die Bestimmung der negativen kann ja hierauf zurückgeführt werden — sei also angenommen, daß

$$0 < C_0 < \bar{C}_0$$

ist.

Da C_0 eine rationale Zahl ist, gibt es stets eine unendliche Menge ganzer Zahlen g, so daß C_0 sich als endlicher systematischer Bruch mit der Grundzahl g schreiben läßt. Hat nämlich C_0 die Form

$$C_0 = \frac{q'}{q},$$

wobei q' und q teilerfremde ganze Zahlen sind, so kommt als kleinste Zahl g diejenige in Betracht, die das Produkt der verschiedenen in q auf-

tretenden Primfaktoren ist. Als g kann dann auch jedes beliebige Vielfache dieses Produktes gewählt werden.

Ist über g in dieser Weise verfügt, so kann man C_0 in die Form bringen:

$$C_0 = c_{00}g^{p+\nu} + c_{01}g^{p+\nu-1} + \cdots + c_{0\nu}g^p,$$

wobei die Zahlen $c_{00}, c_{01}, c_{02}, \ldots c_{0\nu}$, die nach der Natur von C_0 positiv wählbar sind und auch so bestimmt werden sollen, zwischen 0 und $(g-1)$ liegen, die Grenzen eingeschlossen; nur c_{00} muß von Null verschieden sein. Zahlen dieser Art werden wir häufig als Ziffern im System g bezeichnen; wir bemerken noch für das Folgende, daß wir solche Zahlen, die zwischen 0 und $-(g-1)$ liegen, als negative Ziffern im System g ansprechen.

Die ganze Zahl p kann $\gtreqless 0$ sein; ν ist $\geqq 0$. C_0 können wir nun auch noch in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} C_0 &= [c_{00}g^{\nu} + c_{01}g^{\nu-1} + c_{02}g^{\nu-2} + \cdots + c_{0\nu}]g^p \\ &= (c_{00}\,c_{01}\,c_{02}\cdots c_{0\nu})g^p = c_0 g^p, \end{aligned}$$

wenn $(c_{00}\,c_{01}\cdots c_{0\nu}) = c_0$ die mit der Grundzahl g geschriebene ganze Zahl

$$(c_{00}g^{\nu} + c_{01}g^{\nu-1} + \cdots + c_{0\nu})$$

darstellt. Z. B.

$$C_0 = 7/4.$$

Für $g = 10$ wird $C_0 = 1\cdot 10^{-2+2} + 7\cdot 10^{-2+1} + 5\cdot 10^{-2}$ $(p=-2)$

$= \{1\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 5\}10^{-2}$ $(\nu=2)$

$= 175\cdot 10^{-2},$

d. h. $c_0 = 175$ im Dezimalsystem.

Für $g = 2$ wird $C_0 = 1\cdot 2^{-2+2} + 1\cdot 2^{-2+1} + 1\cdot 2^{-2}$.

Hat man 2 als Grundzahl gewählt, so spielt diese Zahl die gleiche Rolle, wie 10 im Dezimalsystem und wird auch genau ebenso geschrieben, nämlich in der Form 10 (= 2 im Zweiersystem). Demnach ist

$$\begin{aligned} C_0 &= 1\cdot 2^{-2+2} + 1\cdot 2^{-2+1} + 1\cdot 2^{-2} \\ &= \{1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1\}2^{-2} \qquad (p=-2)\ (\nu=2) \\ &= 111\cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

d. h. $c_0 = 111$ (geschrieben im Zweiersystem).

Hat man den Wert C_0 in die Form $c_0 g^p$ gebracht und damit die für das Folgende wichtige Zahl p bestimmt, so schreibe man die Koeffizienten $a, b', b'', \cdots b^{(m-1)}$ der Gleichung $f(x) = 0$ unter Berücksichtigung der Zahl p in folgender Weise um:

Wir betrachten zunächst nur die absoluten Beträge von $a, b', b'', \ldots b^{(m-1)}$, die wir mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \ldots \mathfrak{b}^{(m-1)}$ bezeichnen wollen. Die positiven Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}', \ldots \mathfrak{b}^{(m-1)}$ lassen sich dann in die Form bringen:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a} &&= \mathfrak{a}_0 g^{mp} + \mathfrak{a}_1 g^{mp-1} + \mathfrak{a}_2 g^{mp-2} + \cdots \\
&\mathfrak{b}' &&= \mathfrak{b}_0' g^{p} + \mathfrak{b}_1' g^{p-1} + \mathfrak{b}_2' g^{p-2} + \cdots \\
(\mathfrak{A}) \qquad &\mathfrak{b}'' &&= \mathfrak{b}_0'' g^{2p} + \mathfrak{b}_1'' g^{2p-1} + \mathfrak{b}_2'' g^{2p-2} + \cdots \\
&\vdots \\
&\mathfrak{b}^{(m-1)} &&= \mathfrak{b}_0^{(m-1)} g^{(m-1)p} + \mathfrak{b}_1^{(m-1)} g^{(m-1)p-1} + \cdots
\end{aligned}
$$

Da es sich bei den Koeffizienten $a, b', b'', \ldots b^{(m-1)}$ bzw. bei deren absoluten Beträgen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \ldots \mathfrak{b}^{(m-1)}$ um endliche Größen handelt, so sind auch die ganzen positiven Zahlen $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0', \mathfrak{b}_0'', \ldots \mathfrak{b}_0^{(m-1)}$ endlich und bleiben kleiner als eine positive Zahl G_1, da sie ja aus $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \ldots \mathfrak{b}^{(m-1)}$ durch Division mit g^{mp} bzw. g^{p} bzw. $g^{2p} \ldots$ hervorgehen. Die Zahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{b}_1', \mathfrak{b}_2', \mathfrak{b}_3', \ldots, \ldots \mathfrak{b}_1^{(m-1)}, \mathfrak{b}_2^{(m-1)}, \mathfrak{b}_3^{(m-1)}, \ldots$ können stets so bestimmt werden, daß sie positiv sind und zwischen 0 und $(g-1)$ liegen, die Grenzen eingeschlossen, d. h. diese Zahlen sind Ziffern im System mit der Grundzahl g.

Da die Größen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \ldots \mathfrak{b}^{(m-1)}$ die absoluten Beträge von $a, b', b'', \ldots b^{(m-1)}$ sind, so finden die Relationen statt:

$$a = \varepsilon_0 \mathfrak{a}, \; b' = \varepsilon_1 \mathfrak{b}', \; b'' = \varepsilon_2 \mathfrak{b}'', \cdots b^{(m-1)} = \varepsilon_{m-1} \mathfrak{b}^{(m-1)},$$

wenn die Größen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_{m-1}$ eine der Zahlen $+1$ oder -1 bedeuten, je nach dem Vorzeichen von a bzw. $b', b'', \ldots b^{(m-1)}$.

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen $(\mathfrak{A})$ der Reihe nach mit $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_{m-1}$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_0 \mathfrak{a} &&= a = \varepsilon_0 \mathfrak{a}_0 g^{mp} + \varepsilon_0 \mathfrak{a}_1 g^{mp-1} + \varepsilon_0 \mathfrak{a}_2 g^{mp-2} + \cdots \\
&\varepsilon_1 \mathfrak{b}' &&= b' = \varepsilon_1 \mathfrak{b}_0' g^{p} + \varepsilon_1 \mathfrak{b}_1' g^{p-1} + \varepsilon_1 \mathfrak{b}_2' g^{p-2} + \cdots \\
&\vdots \\
&\varepsilon_{m-1} \mathfrak{b}^{(m-1)} &&= b^{(m-1)} = \varepsilon_{m-1} \mathfrak{b}_0^{(m-1)} g^{(m-1)p} + \varepsilon_{m-1} \mathfrak{b}_1^{(m-1)} g^{(m-1)p-1} + \cdots
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir:

$$\varepsilon_0 \mathfrak{a}_\nu = a_\nu, \; \varepsilon_1 \mathfrak{b}_\nu' = b_\nu', \ldots \varepsilon_{m-1} \mathfrak{b}_\nu^{(m-1)} = b_\nu^{(m-1)};$$

dann ist:

$$
\begin{aligned}
&a &&= a_0 g^{mp} + a_1 g^{mp-1} + a_2 g^{mp-2} + \cdots \\
&b' &&= b_0' g^{p} + b_1' g^{p-1} + b_2' g^{p-2} + b_3' g^{p-3} + \cdots \\
&b'' &&= b_0'' g^{2p} + b_1'' g^{2p-1} + b_2'' g^{2p-2} + b_3'' g^{2p-3} + \cdots \\
&\vdots \\
&b^{(m-1)} &&= b_0^{(m-1)} g^{(m-1)p} + b_1^{(m-1)} g^{(m-1)p-1} + b_2^{(m-1)} g^{(m-1)p-2} + \cdots
\end{aligned}
$$

Dabei bleiben die ganzen Zahlen $a_0, b_0', b_0'', \ldots b_0^{(m-1)}$ absolut genommen kleiner als die Zahl G_1.

Alle hier wie später auftretenden Zahlen sollen naturgemäß im System g geschrieben werden.

Die Größen $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1', b_2', b_3', \ldots, b_1^{(m-1)}, b_2^{(m-1)}, b_3^{(m-1)} \ldots$ sind ihrer Definition nach positive oder negative Ziffern im System g, und zwar sind entweder alle a_ν positiv oder negativ, je nachdem a selbst $>$ oder < 0 ist; das gleiche gilt für alle b mit dem nämlichen oberen Index ν, je nachdem $b^{(\nu)}$ selbst $>$ oder < 0 ist.

Die Größen $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}, b_3^{(\nu)}, b_4^{(\nu)} \ldots$ bleiben also, absolut genommen, kleiner als eine positive Zahl G, die ihrerseits $\leqq g$ sein muß.

§ 2.

Aufstellung der Gleichungen, die zur Berechnung der Wurzel dienen.

Sind die Koeffizienten der Gleichung $f(x) = 0$ in der angegebenen Weise umgeformt, so setze man

$$x = c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + c_3 g^{p-3} + \cdots,$$

dabei sind c_0 und p die oben im § 1 eingeführten Zahlen und durch C_0 bekannt, während $c_1, c_2, c_3, \ldots$ erst im folgenden bestimmt werden sollen.

Wenn wir die unbedingte Konvergenz der Reihe

$$x = c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots$$

annehmen (im späteren wird dieses bewiesen werden), so können wir bilden

$$x^{m-\nu} = (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots)^{m-\nu}. \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots (m-1)$$

Führen wir diese Reihen in Gleichung (1) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}(2)\qquad & (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \ldots)^m \\ & + (b_0' g^p + b_1' g^{p-1} + b_2' g^{p-2} + \cdots)(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \ldots)^{m-1} + \ldots \\ & + (b_0^{(m-1)} g^{(m-1)p} + b_1^{(m-1)} g^{(m-1)p-1} + \cdots)(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} \ldots) \\ & = a_0 g^{mp} + a_1 g^{mp-1} + a_2 g^{mp-2} + a_3 g^{mp-3} + \cdots\end{aligned}$$

Wenn wir nun, nachdem potenziert und multipliziert ist, die Koeffizienten der gleich hohen Potenzen von g links und rechts einander gleichsetzen, so erhalten wir gewisse Gleichungen, die uns eine Bestimmung der Größen $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ liefern werden.

Zur Bildung dieser Gleichungen sei an folgendes erinnert:

Hat man die unbedingt konvergente Reihe

$$c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + c_3 g^{p-3} + \cdots,$$

so liefert der polynomische Satz für

$$(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + c_3 g^{p-3} + \cdots)^\mu$$

den Ausdruck:

$$A_0 g^{\mu p} + A_1 g^{\mu p - 1} + A_2 g^{\mu p - 2} + A_3 g^{\mu p - 3} + \cdots$$

Dabei haben die Größen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ folgende Bedeutung:

$$A_0 = c_0^\mu$$

$$A_1 = \mu c_0^{\mu-1} c_1$$

$$A_2 = \mu c_0^{\mu-1} c_2 + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} c_0^{\mu-2} c_2^2$$

$$A_3 = \mu c_0^{\mu-1} c_3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c_0^{\mu-3} c_1^3 + \mu(\mu-1) c_0^{\mu-2} \cdot c_1 \cdot c_2$$

$$\vdots$$

$$A_\nu = \sum \frac{\mu!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma! \ldots \lambda!} c_0^\alpha c_1^\beta c_2^\gamma \cdots c_\varrho^\lambda;$$

dabei hat sich die Summation über alle möglichen Kombinationen zu erstrecken, bei denen $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = \mu$ und $\beta + 2\gamma + \cdots + \varrho\lambda = \nu$ ist.

Die eben definierte Summe

$$A_\nu = \sum \frac{\mu!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma! \ldots \lambda!} c_0^\alpha c_1^\beta c_2^\gamma \cdots c_\varrho^\lambda$$

sei abgekürzt mit $\sum_\nu^\mu$ bezeichnet, so daß z. B. unter

$$\sum_0^\mu = c_0^\mu$$

zu verstehen ist.

Man hat demnach:

$$\{c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots\}^\mu = g^{\mu p} \sum_0^\mu + g^{\mu p - 1} \sum_1^\mu + g^{\mu p - 2} \sum_2^\mu + \cdots$$

Führen wir diese Werte für die Ausdrücke

$$\{c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots\}^{m-\nu} \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots (m-1)$$

in die Gleichung (2) ein, so ergibt sich:

$$c_0^m g^{mp} + g^{mp-1} \sum_1^m + g^{mp-2} \sum_2^m + g^{mp-3} \sum_3^m + \cdots$$

$$+ (b_0' g^p + b_1' g^{p-1} + b_2' g^{p-2} + \cdots)\left(c_0^{m-1} g^{(m-1)p} + g^{(m-1)p-1} \sum_1^{m-1} + g^{(m-1)p-2} \sum_2^{m-1} + \cdots\right)$$

$$+ (b_0'' g^{2p} + b_1'' g^{2p-1} + b_2'' g^{2p-2} + \cdots)\left(c_0^{m-2} g^{(m-2)p} + g^{(m-2)p-1} \sum_1^{m-2} + g^{(m-2)p-2} \sum_2^{m-2} + \cdots\right)$$

$$+ \cdots$$

$$\vdots$$

$$+ (b_0^{(m-2)} g^{(m-2)p} + b_1^{(m-2)} g^{(m-2)p-1} + \cdots)\left(c_0^2 g^{2p} + g^{2p-1} \sum_1^2 + g^{2p-2} \sum_2^2 + \cdots\right)$$

$$+ (b_0^{(m-1)} g^{(m-1)p} + b_1^{(m-1)} g^{(m-1)p-1} + \cdots)(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots)$$

$$= a_0 g^{mp} + a_1 g^{mp-1} + a_2 g^{mp-2} + a_3 g^{mp-3} + \cdots$$

Multiplizieren wir aus, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&{c_0}^m g^{mp} + g^{mp-1}\sum_1^m + g^{mp-2}\sum_2^m + g^{mp-3}\sum_3^m + \cdots \\
&+ g^{mp}\{b_0' {c_0}^{m-1}\} + g^{mp-1}\Big\{b_1' {c_0}^{m-1} + b_0' \sum_1^{m-1}\Big\} \\
&\qquad + g^{mp-2}\Big\{b_2' {c_0}^{m-1} + b_1' \sum_1^{m-1} + b_0' \sum_2^{m-1}\Big\} + \cdots \\
&+ g^{mp}\{b_0'' {c_0}^{m-2}\} + g^{mp-1}\Big\{b_1'' {c_0}^{m-2} + b_0'' \sum_1^{m-2}\Big\} + g^{mp-2}\Big\{b_2'' {c_0}^{m-2} + b_1'' \sum_1^{m-2} + b_0'' \sum_2^{m-2}\Big\} \\
&+ \cdots \\
&\vdots \\
&+ g^{mp}\{b_0^{(m-2)} {c_0}^2\} + g^{mp-1}\Big\{b_1^{(m-2)} {c_0}^2 + b_0^{(m-2)} \sum_1^2\Big\} \\
&\qquad + g^{mp-2}\Big\{b_2^{(m-2)} {c_0}^2 + b_1^{(m-2)} \sum_1^2 + b_0^{(m-2)} \sum_2^2\Big\} + \cdots \\
&+ g^{mp}\{b_0^{(m-1)} c_0\} + g^{mp-1}\{b_1^{(m-1)} c_0 + b_0^{(m-1)} c_1\} + g^{mp-2}\{b_2^{(m-1)} c_0 + b_1^{(m-1)} c_1 + b_0^{(m-1)} c_2\} + \cdots \\
&= a_0 g^{mp} + a_1 g^{mp-1} + a_2 g^{mp-2} + a_3 g^{mp-3} + \cdots
\end{aligned}
$$

Setzt man die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von g links und rechts einander gleich, so müssen die $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ die Gleichungen befriedigen:

(I)

$$
\begin{aligned}
a_0 &= {c_0}^m + b_0' {c_0}^{m-1} + b_0'' {c_0}^{m-2} + b_0''' {c_0}^{m-3} + \cdots + b_0^{(m-1)} c_0, \\
a_1 &= \sum_1^m + \Big\{b_0' \sum_1^{m-1} + b_1' \sum_0^{m-1}\Big\} + \Big\{b_0'' \sum_1^{m-2} + b_1'' \sum_0^{m-2}\Big\} + \cdots \\
&\qquad + \Big\{b_0^{(m-2)} \sum_1^2 + b_1^{(m-2)} \sum_0^2\Big\} + \{b_0^{(m-1)} c_1 + b_1^{(m-1)} c_0\} \\
&= \sum_1^m + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\Big(b_0^{(\nu)} \sum_1^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu}\Big), \\
a_2 &= \sum_2^m + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\Big(b_0^{(\nu)} \sum_2^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_1^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu}\Big), \\
a_3 &= \sum_3^m + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\Big(b_0^{(\nu)} \sum_3^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_2^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_1^{m-\nu} + b_3^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu}\Big), \\
&\vdots \\
a_\pi &= \sum_\pi^m + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\Big(b_0^{(\nu)} \sum_\pi^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_{\pi-1}^{m-\nu} + \cdots + b_{\pi-1}^{(\nu)} \sum_1^{m-\nu} + b_\pi^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu}\Big).
\end{aligned}
$$

Da sich aus diesem Gleichungssystem nicht notwendig ganzzahlige Werte für die c_ν ergeben, und außerdem die erste der Gleichungen überhaupt nicht erfüllt zu sein braucht, da alle auftretenden Größen bekannt sind, so gehen wir zu folgendem System von Gleichungen über:

$$a_0 = c_0^m + b_0' c_0^{m-1} + b_0'' c_0^{m-2} + \cdots + b_0^{(m-1)} c_0 + r_0,$$

$$gr_0 + a_1 = \sum_1^m + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_0^{(\nu)} \sum_1^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu} \right) + r_1,$$

(II)

$$gr_1 + a_2 = \sum_2^m + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_0^{(\nu)} \sum_2^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_1^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu} \right) + r_2,$$

$$\vdots$$

$$gr_{\pi-1} + a_\pi = \sum_\pi^m + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_0^{(\nu)} \sum_\pi^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_{\pi-1}^{m-\nu} + \cdots + b_\pi^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu} \right) + r_\pi.$$

Hierbei ist r_0 eine ganz bestimmte Größe, da ja c_0, sowie die übrigen in der ersten Gleichung von (II) auftretenden Größen bekannt sind. Die übrigen Größen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ werden wir im folgenden so bestimmen, daß sie alle absolut genommen kleiner bleiben, als eine bestimmte endliche Zahl.

Das Gleichungssystem (II) geht offenbar aus (I) hervor, wenn wir die früher angegebene Entwicklung von a, nämlich

$$(R_1) \qquad a = a_0 g^{mp} + a_1 g^{mp-1} + a_2 g^{mp-2} + a_3 g^{mp-3} + \cdots$$

durch die gleichwertige

$$(R_2) \quad a = (a_0 - r_0) g^{mp} + (a_1 + gr_0 - r_1) g^{mp-1} + (a_2 + gr_1 - r_2) g^{mp-2} + \cdots + (a_\pi + gr_{\pi-1} - r_\pi) g^{mp-\pi} + \cdots$$

ersetzen.

Die Reihe (R_1) ist gleich der Reihe (R_2), weil infolge der Endlichkeit der Größen $r_1, r_2, r_3, \ldots$

$$\lim_{\pi=\infty} r_\pi \cdot g^{mp-\pi} = 0$$

ist, und die übrigen mit $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ behafteten Glieder sich gegenseitig aufheben.

Die nähere Bestimmung von $r_1, r_2, r_3, \ldots$ sei noch vorbehalten.

Sollte die Entwicklung von a mit dem Gliede $a_\pi g^{mp-\pi}$ abbrechen, so sind in (R_2) alle Größen $a_{\pi+\varrho} (\varrho \geqq 1)$ einfach durch Null zu ersetzen.

Die Gleichungen (II) ermöglichen nun noch keine unzweideutige Bestimmung der Unbekannten $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$; um dies zu erreichen, müssen wir über die Größen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ geeignet verfügen.

Nach Voraussetzung ist c_0 bekannt; man findet deshalb für r_0 aus

$$a = c_0^m + b_0' c_0^{m-1} + b_0'' c_0^{m-2} + \cdots + b_0^{(m-1)} c_0 + r_0$$

den Wert:

$$r_0 = a_0 - (c_0^m + b_0' c_0^{m-1} + b_0'' c_0^{m-2} + \cdots + b_0^{(m-1)} c_0).$$

Daraus folgt

$$|r_0| = |a_0 - c_0^m - b_0' c_0^{m-1} - b_0'' c_0^{m-2} - \cdots - b_0^{(m-1)} c_0|.$$

Bezeichnen wir den rechtsstehenden Ausdruck mit R_0, so ist also:

$$|r_0| = R_0,$$

wo R_0 eine ganz bestimmte Zahl ist.

Zur näheren Bestimmung der Größen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ schreiben wir die Gleichungen (II) etwas ausführlicher in der Form:

$$g r_0 + a_1 = m c_0^{m-1} c_1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left\{ (m-\nu) c_0^{m-\nu-1} c_1 b_0^{(\nu)} + c_0^{m-\nu} b_1^{(\nu)} \right\} + r_1,$$

$$\begin{aligned} g r_1 + a_2 = {} & m c_0^{m-1} c_2 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} c_0^{m-2} c_1^2 \\ & + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left\{ \left[(m-\nu) c_0^{m-\nu-1} c_2 + \frac{(m-\nu)(m-\nu-1)}{1 \cdot 2} c_0^{m-\nu-2} c_1^2 \right] b_0^{(\nu)} \right. \\ & \left. + (m-\nu) c_0^{m-\nu-1} c_1 b_1^{(\nu)} + c_0^{m-\nu} b_2^{(\nu)} \right\} + r_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad g r_2 + a_3 = {} & m c_0^{m-1} c_3 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c_0^{m-3} c_1^3 + m(m-1) c_0^{m-2} c_1 c_2 \\ & + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left\{ \left[(m-\nu) c_0^{m-\nu-1} c_3 + \frac{(m-\nu)(m-\nu-1)(m-\nu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c_0^{m-\nu-3} c_1^3 \right. \right. \\ & \left. + (m-\nu)(m-\nu-1) c_0^{m-\nu-2} c_1 c_2 \right] b_0^{(\nu)} \\ & + \left[(m-\nu) c_0^{m-\nu-1} c_2 + \frac{(m-\nu)(m-\nu-1)}{1 \cdot 2} c_0^{m-\nu-2} c_1^2 \right] b_1^{(\nu)} \\ & \left. + \left[(m-\nu) c_0^{m-\nu-1} c_1 \right] b_2^{(\nu)} + c_0^{m-\nu} b_3^{(\nu)} \right\} + r_3. \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Da es zunächst nur von Wichtigkeit ist, in der allgemeinen Gleichung:

$$(3) \quad g r_{\mu-1} + a_\mu = \sum_{\mu}^{m} + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_0^{(\nu)} \sum_{\mu}^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_{\mu-1}^{m-\nu} + \cdots + b_\mu^{(\nu)} \sum_{0}^{m-\nu} \right) + r_\mu$$

auf der rechten Seite diejenigen Glieder zu betrachten, die c_μ enthalten, so wollen wir im folgenden diejenigen Summen, in denen c_μ nicht auftreten kann, nicht ausführlich schreiben.

Im weiteren Verlauf der Untersuchung wird oft von dem Gewichte eines Ausdruckes die Rede sein. Dabei ist unter Gewicht, wie üblich, das Produkt aus Exponent in den Index zu verstehen bzw., wenn mehrere verschiedene Größen auftreten, die Summe dieser Produkte.

Wir werden sowohl Ausdrücke der Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ allein, als auch solche, in denen $b_\tau^{(\nu)}$ auftreten, auf das Gewicht untersuchen; dabei ist zu beachten, daß bei den Größen b der obere Index kein Exponent ist, somit auf das Gewicht keinen Einfluß hat.

So hat beispielsweise der Ausdruck:

$$c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \ldots c_\varrho^{\lambda} b_\sigma^{(\nu)}$$

das Gewicht $\alpha + 2\beta + \cdots + \varrho\lambda$, wenn man nur die Größen $c_1, c_2, \ldots c_\varrho$ berücksichtigt, und das Gewicht $\alpha + 2\beta + \cdots + \varrho\lambda + \sigma$, wenn man auch die Größe $b_\sigma^{(\nu)}$ in Betracht zieht.

Kehren wir zu Gleichung (3) zurück. Diejenigen Glieder, in denen c_μ vorkommt, sind in bezug auf die Größen c allein mindestens vom Gewichte μ. Es kann demnach c_u nur in den Summen:

$$\sum_{\mu}^{m}; \quad \sum_{\mu}^{m-1}; \quad \sum_{\mu}^{m-2}; \quad \ldots; \quad \sum_{\mu}^{2}; \quad \sum_{\mu}^{1}$$

auftreten.

In Gleichung (3) ist nach dem Vorangegangenen das Gewicht eines jeden Gliedes, als Funktion der Größen c und b aufgefaßt, gleich μ, dagegen $\leqq \mu$, wenn nur die Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_\mu$ berücksichtigt werden. Es kann demnach in Gleichung (3), da auf der rechten Seite nur Größen des Gewichtes μ auftreten, c_μ nur in der ersten Potenz vorkommen, und ferner müssen solche Glieder, die c_μ wirklich enthalten, frei sein von Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$, sowie von $b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}, b_3^{(\nu)}, \ldots, b_\mu^{(\nu)}$, da sich sonst das gemeinsame Gewicht in bezug auf die Größen $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ und $b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}, b_3^{(\nu)}, \ldots$ größer als μ ergeben würde. Natürlich können c_0 und $b_0^{(\nu)}$ in dem Gliede mit c_μ auftreten, da diese nichts zum Gewichte beitragen.

Die sämtlichen Glieder auf der rechten Seite von (3), die c_μ wirklich enthalten, sind demnach die folgenden:

$$m c_0^{m-1} c_\mu, \; (m-1) c_0^{m-2} c_\mu \cdot b_0', \; (m-2) c_0^{m-3} c_\mu b_0'', \; \ldots, \; 2 c_0 c_\mu b_0^{(m-2)}, \; c_\mu b_0^{(m-1)}.$$

In Gleichung (3) tritt also rechts, wenn man c_μ vor die Klammer setzt, das Glied auf:

$$c_\mu \{ m c_0^{m-1} + (m-1) c_0^{m-2} b_0' + (m-2) c_0^{m-3} b_0'' + \cdots + 2 c_0 b_0^{(m-2)} + b_0^{(m-1)} \}.$$

Stellt man demnach die Gleichung (3) der Reihe nach für $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ auf, so ist in jeder der sich ergebenden Gleichungen der Faktor von c_1 bzw. $c_2, c_3, c_4, \ldots$ immer derselbe, da er nicht vom Index μ abhängt.

Bezeichnen wir die Summe $\sum_{\mu}^{m-\nu}$, in der das Glied mit c_μ fehlt, durch $\sum_{\mu}^{\prime m-\nu}$ und setzen

$$m c_0^{m-1} + (m-1) c_0^{m-2} b_0' + \cdots + 2 c_0 b_0^{(m-2)} + b_0^{(m-1)} = A,$$

so lassen sich die Gleichungen (III) unter Hervorhebung der Glieder mit c_1 bzw. $c_2, c_3, c_4, \ldots$ folgendermaßen schreiben:

$$g r_0 + a_1 = c_1 A + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} c_0^{m-\nu} b_1^{(\nu)} + r_1,$$

$$g r_1 + a_2 = c_2 A + \sum_{2}^{\prime m} + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_0^{(\nu)} \sum_{2}^{\prime m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_{1}^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_{0}^{m-\nu} \right) + r_2,$$

$$g r_2 + a_3 = c_3 A + \sum_{3}^{\prime m} + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_0^{(\nu)} \sum_{3}^{\prime m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_{2}^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_{1}^{m-\nu} + b_3^{(\nu)} \sum_{0}^{m-\nu} \right) + r_3,$$

$$\vdots$$

$$g r_{\mu-1} + a_\mu = c_\mu A + \sum_{\mu}^{\prime m} + \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_0^{(\nu)} \sum_{\mu}^{\prime m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_{\mu-1}^{m-\nu} + \cdots + b_\mu^{(\nu)} \sum_{0}^{m-\nu} \right) + r_\mu.$$

$$\vdots$$

In dem eben hergeleiteten System bringen wir die Glieder $c_1 A + r_1$, bzw. $c_2 A + r_2$, $c_3 A + r_3$, ... auf die linke, den Rest auf die rechte Seite der Gleichungen und erhalten dann:

(IV)

$$1)\quad c_1 A + r_1 = g r_0 + a_1 - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} c_0^{m-\nu} b_1^{(\nu)},$$

$$2)\quad c_2 A + r_2 = g r_1 + a_2 - \sum_{2}^{\prime m} - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_0^{(\nu)} \sum_{2}^{\prime m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_{1}^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_{0}^{m-\nu} \right),$$

$$3)\quad c_3 A + r_3 = g r_2 + a_3 - \sum_{3}^{\prime m} - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_0^{(\nu)} \sum_{3}^{\prime m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_{2}^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_{1}^{m-\nu} + b_3^{(\nu)} \sum_{0}^{m-\nu} \right),$$

$$\vdots$$

$$\mu)\quad c_\mu A + r_\mu = g r_{\mu-1} + a_\mu - \sum_{\mu}^{\prime m} - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_0^{(\nu)} \sum_{\mu}^{\prime m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_{\mu-1}^{m-\nu} + \cdots + b_\mu^{(\nu)} \sum_{0}^{m-\nu} \right).$$

In Gleichung 1) von (IV) ist A, sowie die rechte Seite bekannt; es ist demnach c_1 und r_1 unzweideutig bestimmbar, wenn wir festsetzen, daß

$$0 \leqq r_1 < A \text{ sei, falls } A > 0,$$

dagegen

$$0 \geqq r_1 > A, \text{ falls } A < 0 \text{ ist.}$$

Nach Bestimmung von c_1 und r_1 kann man aus der Gleichung 2) von (IV) genau ebenso c_2 und r_2 erhalten, wenn man bzgl. r_2 die gleiche

Voraussetzung, wie bei r_1, trifft. Das Gleiche gilt natürlich dann weiter für $c_3 \ldots r_3$, $c_4 \ldots r_4$, usw.

Es sind also die Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bzw. $r_1, r_2, r_3, \ldots$ vollkommen bestimmt, wenn man bzgl. der Größen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die obige Annahme festhält.

Die r_μ genügen dann der Ungleichung

$$|r_\mu| < |A| \qquad \mu = 1, 2, 3, 4, \cdots.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (IV) mögen im Anschluß an „Lüroth“ (siehe S. 40 oben) die korrigierten Teilreste genannt und bzw. mit $r_1', r_2', r_3', \ldots$ bezeichnet werden.

Wir haben jetzt eine Reihe, die der gegebenen Gleichung formell genügt: $c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + c_3 g^{p-3} + \cdots$.

Es ist nun der Nachweis zu führen, daß sie auch konvergent ist.

§ 3.

Konvergenzbeweis für die Reihe: $c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + c_3 g^{p-3} + \cdots$.

In den Gleichungen (IV) stehen rechts, wenn man von dem durch C_0 bestimmten c_0 absieht, Ausdrücke, die eine oder mehrere der Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ und eventuell ihre Potenzen als Faktoren enthalten. Wir formen jetzt die Gleichungen (IV) so um, daß links nur $c_1 A$ bzw. $c_2 A$, $c_3 A$, ... steht; rechts wollen wir nach Kombinationen der Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ordnen. Die so auftretenden Kombinationen werden mit gewissen Faktoren multipliziert sein; da jedoch der genaue Wert dieser Koeffizienten zunächst nicht von Belang ist, möge er, um die entstehenden Gleichungen übersichtlicher zu machen, nur durch eine beigefügte Klammer angedeutet werden.

$$c_1 A = g r_0 + a_1 - r_1 - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} c_0^{m-\nu} b_1^{(\nu)},$$

$$c_2 A = g r_1 + a_2 - r_2 - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_2^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu} \right) - c_1^2(\cdots) - c_1(\cdots),$$

(V)
$$c_3 A = g r_2 + a_3 - r_3 - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_3^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu} \right) - c_1^3(\cdots) - c_1^2(\cdots) - c_1(\cdots) - c_1 c_2(\cdots) - c_2(\cdots),$$

$$c_4 A = g r_3 + a_4 - r_4 - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \left(b_4^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu} \right) - c_1^4(\cdots) - c_1^3(\cdots) - c_1^2(\cdots) - c_1(\cdots) - c_1^2 c_2(\cdots) - c_2^2(\cdots) - c_1 c_3(\cdots) - c_3(\cdots) - c_1 c_2(\cdots) - c_2(\cdots).$$

$$\vdots$$

Es sieht also allgemein $c_\mu A$, wie folgt, aus:

$$\mu)\quad c_\mu A = g r_{\mu-1} + a_\mu - r_\mu - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\left(b_\mu^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu}\right) - \sum c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \cdots c_\varrho^{\lambda}(\cdots),$$

wobei sich die Summation $\sum c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \cdots c_\varrho^{\lambda}(\cdots)$ über alle möglichen Kombinationen zu erstrecken hat, bei denen $\alpha + \beta + \cdots + \lambda \lesseqgtr m$ und $\alpha + 2\beta + \cdots + \varrho\lambda \lesseqgtr \mu$ ist.

Ausgeschlossen bleibt nur die Kombination $c_\mu(\cdots)$, da diese schon in der Form $c_\mu A$ linker Hand enthalten ist. Wir bemerken beiläufig, daß rechts, mit Ausnahme von $c_\mu(\cdots)$, sämtliche angeführten Kombinationen vorkommen können, wie aus der Definition der Summen

$$\sum_\varrho^{m-\nu} \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots, \mu-1) \quad \text{bzw.} \quad \sum_\mu'^{m-\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

folgt.

Der Ausdruck $\left(g r_{\mu-1} + a_\mu - r_\mu - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\left(b_\mu^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu}\right)\right)$, der frei von Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ist, bleibt absolut genommen kleiner, als eine endliche Größe R, zu deren Bestimmung wir uns wenden wollen.

Der angeführte Ausdruck, der sich auch in der Form schreiben läßt:

$$g r_{\mu-1} + a_\mu - r_\mu - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}(c_0^{m-\nu} b_\mu^{(\nu)})$$

ist gleich:

$$g r_{\mu-1} + a_\mu - r_\mu - c_0^{m-1} b_\mu' - c_0^{m-2} b_\mu'' - \cdots - c_0 b_\mu^{(m-1)}.$$

Nach Voraussetzung ist

$$|r_0| = R_0, \quad r_\mu| < |A| \qquad \mu = 1, 2, 3, \cdots.$$

Die Größen a_μ und $b_\mu^{(\nu)}$ $(\mu > 0)$ sind der Art ihrer Bestimmung nach (siehe S. 5) absolut genommen kleiner als g. Bezeichnen wir die größere der beiden Zahlen $|A|$ und R_0 mit A', so gilt die Ungleichung:

$$\left|g r_{\mu-1} + a_\mu - r_\mu - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} c_0^{m-\nu} b_\mu^{(\nu)}\right|$$
$$< g A' + g + A' + g\{|c_0^{m-1}| + |c_0^{m-2}| + \cdots + |c_0|\}.$$

Definieren wir die Zahl R durch die Gleichung:

$$R = g A' + g + A' + g\{|c_0^{m-1}| + |c_0^{m-2}| + \cdots + |c_0|\},$$

so ist:

$$\left|g r_{\mu-1} + a_\mu - r_\mu - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\left(b_\mu^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu}\right)\right| < R.$$

Betrachten wir jetzt die Faktoren, die bei den Kombinationen $(c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \dots c_{\varrho}^{\lambda})$ in Gleichungen (V) auftreten und die wir symbolisch durch Klammern bezeichnet haben. Auch diese bleiben dem absoluten Betrage nach kleiner, als eine bestimmt angebbare Größe S.

Greifen wir eine beliebige Kombination $(c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \dots c_{\varrho}^{\lambda})$ aus der Gleichung (μ) von (V) heraus, so ist

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda \lesseqgtr m, \quad \alpha + 2\beta + \dots + \varrho\lambda \lesseqgtr \mu.$$

Es sei

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = \sigma, \quad \alpha + 2\beta + \dots + \varrho\lambda = \tau.$$

Denkt man sich die Kombination $(c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \dots c_{\varrho}^{\lambda})$ mit den Gliedern multipliziert, die in dem zugehörigen Koeffizienten auftreten, so muß jeder entstehende Ausdruck das Gewicht μ haben, wenn man sowohl die Größen b als c in Betracht zieht. Da nun $(c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \dots c_{\varrho}^{\lambda})$ schon das Gewicht τ besitzt, so muß der jeweils hinzukommende Faktor das Gewicht $\mu - \tau$ haben. Auf das Gewicht $\mu - \tau$ können nur Größen b einen Einfluß haben, da in dem Koeffizienten von $(c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \dots c_{\varrho}^{\lambda})$ die Größen $c_1, c_2, c_3, \dots$ nicht mehr auftreten. Da ferner in jedem Glied nur ein b auftritt, so können von diesen nur die folgenden in Betracht kommen:

$$b'_{\mu-\tau}, \; b''_{\mu-\tau}, \; b'''_{\mu-\tau}, \; \dots, \; b^{(m-2)}_{\mu-\tau}, \; b^{(m-1)}_{\mu-\tau}.$$

Jedes dieser $b^{(\nu)}_{\mu-\tau}$ ist seinerseits, außer mit $(c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \dots c_{\varrho}^{\lambda})$, mit einem gewissen Faktor multipliziert, den wir jetzt bestimmen wollen.

Entsprechend dem oberen Index (ν) war $b^{(\nu)}_{\mu-\tau}$ $(\nu > 0)$ multipliziert mit der Reihe:

$$(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \dots + c_{\mu} g^{p-\mu} + \dots)^{m-\nu}.$$

Der Ausdruck, der von dieser Potenz herrührt und $(c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \dots c_{\varrho}^{\lambda})$ als Faktor enthält, ist: $\frac{(m-\nu)!}{\alpha_0!\,\alpha!\,\beta!\dots\lambda!} c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \dots c_{\varrho}^{\lambda}$, wobei $\alpha_0 + \alpha + \beta + \dots + \lambda = m - \nu$ ist.

Wegen $\alpha + \beta + \dots + \lambda = \sigma$ ist demnach $\alpha_0 = m - \nu - \sigma$. Der Faktor von $b^{(\nu)}_{\mu-\tau}$ ist also, wenn wir von $(c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \dots c_{\varrho}^{\lambda})$ absehen:

$$\frac{(m-\nu)!}{(m-\nu-\sigma)!\,\alpha!\,\beta!\dots\lambda!} c_0^{m-\nu-\sigma}.$$

Zu den Größen $b'_{\mu-\tau}, \; b''_{\mu-\tau}, \; \dots, \; b^{(m-2)}_{\mu-\tau}, \; b^{(m-1)}_{\mu-1}$ gehören somit, abgesehen von $(c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \dots c_{\varrho}^{\lambda})$, die Faktoren:

$$\frac{(m-1)!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(m-\sigma-1)!} c_0^{m-\sigma-1} \text{ für } b'_{\mu-\tau},$$

$$\frac{(m-2)!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(m-\sigma-2)!} c_0^{m-\sigma-2} \text{ für } b''_{\mu-\tau},$$

$$\frac{(m-3)!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(m-\sigma-3)!} c_0^{m-\sigma-3} \text{ für } b'''_{\mu-\tau},$$

$$\vdots$$

Dies geht offenbar nur solange weiter, bis man zu einer Zahl t kommt, von der Art, daß $m - \sigma - t = 0$ ist, denn

$$(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots)^\pi \qquad \pi < \sigma$$

kann keine Kombination $(c_1^\alpha c_2^\beta \ldots c_\varrho^\lambda)$ liefern, in der $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = \sigma$.

Das letzte Glied im Koeffizienten von $(c_1^\alpha c_2^\beta \ldots c_\varrho^\lambda)$ lautet demnach:

$$b_{\mu-\tau}^{(t)} \frac{(m-t)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!\,(m-\sigma-t)!} c_0^{m-\sigma-t}$$

oder ergibt sich wegen $m - \sigma - t = 0$

$$= \frac{(m-t)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!}\, b_{\mu-\tau}^{(t)}.$$

Außer diesen Gliedern, die alle ein b enthalten, kann für den Fall, daß $\alpha + 2\beta + \cdots + \varrho\lambda = \tau = \mu$ ist, in dem Koeffizienten von $(c_1^\alpha c_2^\beta \ldots c_\varrho^\lambda)$ noch ein Glied ohne b auftreten, nämlich:

$$\frac{m!}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!\,(m-\sigma)!}\, c_0^{m-\sigma},$$

herrührend von $(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots)^m$.

Dabei ist wesentlich zu beachten, daß alsdann in $(c_1^\alpha c_2^\beta \ldots c_\varrho^\lambda)$ $\alpha + \beta + \cdots + \lambda$ mindestens $= 2$ sein muß; denn sollte $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1$ sein, so würde man es mit dem Gliede $m c_\mu c_0^{m-1}$ zu tun haben, das schon linker Hand in $c_\mu A$ enthalten ist.

Tritt also das Glied $\frac{m!}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!\,(m-\sigma)!}\, c_0^{m-\sigma}$ auf, so muß

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = \sigma \geqq 2,$$

somit $m - \sigma \leqq m - 2$ sein.

In den mit einem b behafteten Gliedern

$$\frac{(m-\nu)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!\,(m-\sigma-\nu)!}\, c_0^{m-\sigma-\nu} b_{\mu-\tau}^{(\nu)}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots, (m-1)$$

ist $m - \sigma - \nu$ offenbar auch $\leqq m - 2$, da ν seiner Definition nach $\geqq 1$ ist, und auch $\sigma \geqq 1$ sein muß, falls von einer Kombination $(c_1^\alpha c_2^\beta \ldots c_\varrho^\lambda)$ die Rede sein kann.

Der Koeffizient von $(c_1^\alpha c_2^\beta \ldots c_\varrho^\lambda)$, wobei $\alpha + 2\beta + \cdots + \varrho\lambda = \tau$ sein soll, kann demnach höchstens den Wert haben:

$$\frac{m!}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!\,(m-\sigma)!}\, c_0^{m-\sigma} + \frac{(m-1)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!\,(m-\sigma-1)!}\, b'_{\mu-\tau} c_0^{m-\sigma-1} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(m-t)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!}\, b_{\mu-\tau}^{(t)},$$

wobei $(m-\sigma-t)! = 0! = 1$ gesetzt wurde.

Es treten also nicht mehr als m Glieder auf von der Form:

$$\frac{(m-\nu)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!\,(m-\sigma-\nu)!}\, b_{\mu-\tau}^{(\nu)} c_0^{m-\sigma-\nu}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots, (m-1),$$

wobei $b_{\mu-\tau}^{(0)} = 1$ zu setzen ist.

Die sämtlichen Größen $\left|b_{\mu-\tau}^{(\nu)}\right|$ bleiben nach Art ihrer Entstehung kleiner, als eine gewisse Zahl $\bar{b}$. Die Zahl $\bar{b}$ ist nicht notwendig $\leqq g-1$, denn für $\tau=\mu$ sind die Größen $\left|b_{\mu-\tau}^{(\nu)}\right| = |b_0{}^{\nu}|$ ihrer Definition nach unter Umständen $> g-1$.

Bezeichnen wir demnach die größte der Zahlen $\frac{(m-\nu)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(m-\sigma-\nu)!}$ durch M, so ist

$$\left|\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(m-\sigma)!}c_0{}^{m-\sigma}+\frac{(m-1)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(m-\sigma-1)!}b'_{\mu-\tau}c_0{}^{m-\sigma-1}+\cdot\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\cdot+\frac{(m-t)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}b_{\mu-\tau}^{(t)}\right|<m\cdot M\cdot\bar{b}\cdot c_0{}^{m-2},$$

wobei beachtet wurde, daß $c_0{}^{m-\sigma}>c_0{}^{m-\sigma-\varrho}$, da c_0 nach Voraussetzung eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist.

Definieren wir die Größe S durch die Gleichung:

$$S=m\cdot M\cdot\bar{b}\cdot c_0{}^{m-2},$$

so gilt die Relation:

$$\left|\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(m-\sigma)!}c_0{}^{m-\sigma}+\frac{(m-1)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(m-\sigma-1)!}b'_{\mu-\tau}c_0{}^{m-\sigma-1}+\cdot\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\cdot+\frac{(m-t)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}b_{\mu-\tau}^{(t)}\right|<S.$$

Führen wir nun in die Gleichungen (V) die Größen R und S ein und gehen zu den absoluten Beträgen über, so gelten die Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
&|c_1|\,|A|<R,\\
&|c_2|\,|A|<R+S|c_1{}^2|+S|c_1|,\\
&|c_3|\,|A|<R+S|c_1{}^3|+S|c_1{}^2|+S|c_1|+S|c_1|\,|c_2|+S|c_2|,\\
&\quad\vdots\\
&|c_\mu|\,|A|<R+S\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu}}|c_1{}^\alpha|\,|c_2{}^\beta|\cdots|c_\varrho{}^\lambda|\Big\}.
\end{aligned}$$

Dabei hat sich die Summation über alle möglichen Kombinationen zu erstrecken; ausgeschlossen bleibt nur $S|c_\mu|$.

Setzen wir noch: $\frac{R}{|A|}=\mathsf{A}'$, sowie $\frac{S}{|A|}=\mathsf{B}$, so ist:

$$\begin{aligned}
&|c_1|<\mathsf{A}',\\
&|c_2|<\mathsf{A}'+\mathsf{B}\{|c_1{}^2|+|c_1|\},\\
&|c_3|<\mathsf{A}'+\mathsf{B}\{|c_1{}^3|+|c_1{}^2|+|c_1|+|c_1|\,|c_2|+|c_2|\},\\
&\quad\vdots\\
&|c_\mu|<\mathsf{A}'+\mathsf{B}\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu}}|c_1{}^\alpha|\,|c_2{}^\beta|\cdots|c_\varrho{}^\lambda|\Big\}.
\end{aligned}\tag{VI}$$

Man definiere nun neue Größen c_ν' durch die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&c_1' = \mathsf{A},\\
&c_2' = \mathsf{A} + \mathsf{B}\{|c_1^{\,2}| + |c_1|\},\\
(\mathrm{VII}) \qquad &c_3' = \mathsf{A} + \mathsf{B}\{|c_1^{\,3}| + |c_1^{\,2}| + |c_1| + |c_1||c_2| + |c_2|\},\\
&\vdots\\
&c_\mu' = \mathsf{A} + \mathsf{B}\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu}} |c_1^{\,\alpha}||c_2^{\,\beta}|\cdots|c_\varrho^{\,\lambda}|\Big\}.
\end{aligned}
$$

A bedeute die größere der beiden Zahlen A' und 2. Für das zunächst Folgende würde es genügen, wenn A die größere der beiden Zahlen A' und 1 wäre; da es sich jedoch für das Spätere praktischer erweist, über A in der angegebenen Weise zu verfügen, so sei dies hier schon geschehen.

Infolge der Ungleichungen (VI) und Gleichungen (VII) findet dann die Beziehung statt:

$$|c_\mu| < c_\mu'.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung

$$(4) \qquad c_\mu' = \mathsf{A} + \mathsf{B}\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu}} |c_1^{\,\alpha}||c_2^{\,\beta}|\cdots|c_\varrho^{\,\lambda}|\Big\}$$

treten unter anderen die beiden Glieder $\mathsf{B}|c_1||c_{\mu-1}|$, sowie $\mathsf{B}|c_{\mu-1}|$ auf. Diese wollen wir vorläufig unverändert beibehalten, während wir den Rest der Glieder so umformen, daß wir aus allen Gliedern, die $|c_1|$ enthalten, dieses einmal als Faktor heraussetzen.*) Der so entstehende Koeffizient von $|c_1|$ hat alsdann die Form:

$$\mathsf{B}\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-1}} |c_1^{\,\alpha}||c_2^{\,\beta}|\cdots|c_\varrho^{\,\lambda}|\Big\}.$$

Dabei erstreckt sich diese letzte Summation natürlich nicht notwendig über alle möglichen Kombinationen.

Nun war:

$$(5) \qquad c_{\mu-1}' = \mathsf{A} + \mathsf{B}\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots\varrho\lambda\leqq\mu-1}} |c_1^{\,\alpha}||c_2^{\,\beta}|\cdots|c_\varrho^{\,\lambda}|\Big\},$$

wobei sich diesmal die Summation über alle möglichen Kombinationen zu erstrecken hatte. Daraus folgt, daß der eben aufgestellte Koeffizient von $|c_1|$

*) Das Glied $\mathsf{B}|c_1||c_{\mu-1}|$ wird deshalb getrennt behandelt, weil sonst $\mathsf{B}|c_{\mu-1}|$ in den entstehenden Koeffizienten von $|c_1|$ mit einginge und dann die Ungleichung (6) nicht abgeleitet werden könnte, da auf der rechten Seite von (5) das Glied $\mathsf{B}|c_{\mu-1}|$ nach Definition nicht auftreten kann.

(6) $$\mathsf{B}\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-1}}|c_1^{\alpha}||c_2^{\beta}|\cdots|c_\varrho^{\lambda}|\Big\}<c'_{\mu-1}$$

ist.

Die noch vorhandenen Glieder auf der rechten Seite von (4) enthalten jetzt den Faktor $c_1|$ nicht mehr. Wir setzen nun überall da, wo noch $|c_2|$ auftritt, dieses einmal als Faktor heraus und bekommen dann als Koeffizienten von $|c_2|$ einen Ausdruck von der Form:

$$\mathsf{B}\Big\{\sum_{\substack{\beta+\gamma+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ 2\beta+3\gamma+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-2}}|c_2^{\beta}||c_3^{\gamma}|\cdots|c_\varrho^{\lambda}|\Big\}.$$

Die Summation erstreckt sich auch diesmal nicht notwendig über alle möglichen Kombinationen, und aus demselben Grunde, wie beim Koeffizienten von $|c_1|$, ist der Faktor von $|c_2|$

$$\mathsf{B}\Big\{\sum_{\substack{\beta+\gamma+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ 2\beta+3\gamma+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-2}}c_2^{\beta}\,c_3^{\gamma}\cdots c_\varrho^{\lambda}\Big\}<c'_{\mu-2},$$

da ja

$$c'_{\mu-2}=\mathsf{A}+\mathsf{B}\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-2}}|c_1^{\alpha}|\,c_2^{\beta}\cdots c_\varrho^{\lambda}|\Big\},$$

wo alle möglichen Kombinationen zu beachten sind.

In dieser Weise fahren wir fort und erhalten stets als Koeffizienten von $|c_1|, |c_2|, |c_3|, \ldots$ Ausdrücke, die bzgl. kleiner sind als

$$c'_{\mu-1},\ c'_{\mu-2},\ c'_{\mu-3},\ c'_{\mu-4},\ \ldots.$$

Naturgemäß kommen wir auf diese Weise nur bis zum Glied $\left|c_{\frac{\mu}{2}}\right|$, wenn μ eine gerade Zahl ist, oder bis zum Glied $\left|c_{\frac{\mu-1}{2}}\right|$, wenn μ ungerade ist, da alsdann alle Glieder in die Koeffizienten eingegangen sind.

Führen wir jetzt an Stelle der so auftretenden Koeffizienten von $|c_1|, |c_2|, |c_3|, \ldots$ die größeren Werte $c'_{\mu-1}, c'_{\mu-2}, c'_{\mu-3}, \ldots$ ein, so ergeben sich aus (VII) die Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
&c_1'=\mathsf{A},\\
&c_2'<\mathsf{A}+\mathsf{B}|c_1||c_1|+\mathsf{B}|c_1|,\\
&c_3'<\mathsf{A}+\mathsf{B}|c_1||c_2|+\mathsf{B}|c_2|+|c_1|c_2',\\
&c_4'<\mathsf{A}+\mathsf{B}|c_1\,c_3|+\mathsf{B}|c_3\,|+|c_1|c_3'+|c_2|c_2',\\
&\quad\vdots\\
&c_\mu'<\mathsf{A}+\mathsf{B}|c_1\,|c_{\mu-1}|+\mathsf{B}|c_{\mu-1}|+|c_1\,c'_{\mu-1}+|c_2|c'_{\mu-2}+\cdots+\left|c_{\frac{\bar\mu}{2}}\right|c'_{\mu-\frac{\bar\mu}{2}}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\bar\mu=\mu$ zu setzen, wenn μ gerade, dagegen $\bar\mu=\mu-1$, falls μ ungerade ist.

Da $|c_\nu| < c_\nu'$ ist, so werden wir diese Ungleichungen noch verstärken, wenn wir überall c_ν' an Stelle von $|c_\nu|$ setzen.

Es bestehen also auch die Ungleichungen:

$$c_1' = \mathsf{A},$$
$$c_2' < \mathsf{A} + \mathsf{B}\, c_1' c_1' + \mathsf{B}\, c_1',$$
$$c_3' < \mathsf{A} + \mathsf{B}\, c_1' c_2' + \mathsf{B}\, c_2' + c_1' c_2',$$
$$c_4' < \mathsf{A} + \mathsf{B}\, c_1' c_3' + \mathsf{B}\, c_3' + c_1' c_3' + c_2' c_2',$$
$$\vdots$$
$$c_\mu' < \mathsf{A} + \mathsf{B}\, c_1' c_{\mu-1}' + \mathsf{B}\, c_{\mu-1}' + c_1' c_{\mu-1}' + c_2' c_{\mu-2}' + \cdots + c_{\frac{\mu}{2}}' c_{\mu-\frac{\mu}{2}}'.$$

Man definiere nun die Größen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ folgendermaßen:

$$\gamma_1 = \mathsf{A}$$
$$\gamma_2 = \mathsf{B}\gamma_1\gamma_1 + \mathsf{B}\gamma_1 + \gamma_1\gamma_1,$$
$$\gamma_3 = \mathsf{B}\gamma_1\gamma_2 + \mathsf{B}\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1,$$
(VIII) $$\gamma_4 = \mathsf{B}\gamma_1\gamma_3 + \mathsf{B}\gamma_3 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_2 + \gamma_3\gamma_1,$$
$$\vdots$$
$$\gamma_\mu = \mathsf{B}\gamma_1\gamma_{\mu-1} + \mathsf{B}\gamma_{\mu-1} + \gamma_1\gamma_{\mu-1} + \gamma_2\gamma_{\mu-2} + \cdots + \gamma_{\mu-1}\gamma_1.$$

Die so definierten Größen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ stellen eine Reihe wachsender Zahlen dar, deren kleinste γ_1 nach Voraussetzung über A größer oder gleich 2 ist. Deshalb ist auch jedes Produkt zweier Zahlen $\gamma_\sigma\gamma_\tau$ größer als ein Faktor allein.

Dies wurde auch beachtet, indem die von der zweiten Gleichung (VIII) an fehlende Größe $\mathsf{A} = \gamma_1$ durch die in (VIII) unterstrichenen größeren Ausdrücke $\gamma_1\gamma_1$ bzw. $\gamma_2\gamma_1, \gamma_3\gamma_1, \ldots$ allgemein durch:

$$\left(\gamma_{\frac{\mu}{2}+1}\gamma_{\frac{\mu}{2}-1} + \cdots + \gamma_{\mu-2}\gamma_2 + \gamma_{\mu-1}\gamma_1\right)$$

ersetzt wurde.

Für die so eingeführten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ gilt die Relation:

$$|c_\mu| < c_\mu' < \gamma_\mu.$$

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen (VIII) der Reihe nach mit $x, x^2, x^2, x^4 \ldots$ und setzen

$$\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \cdots = s,$$

so ergibt sich durch Addition:

$$s = \mathsf{A}x + xs(\mathsf{AB} + \mathsf{B}) + s^2$$

und daraus:

(7) $$s^2 - s\{1 - x(\mathsf{AB} + \mathsf{B})\} + \mathsf{A}x = 0.$$

Durch Einsetzen des Wertes $s = \frac{1 - x(\mathsf{AB} + \mathsf{B})}{2}$ in die Gleichung (7)

erhalten wir, entsprechend den Werten von x, die Doppelpunkte von (7). Setzen wir ein, so ist:

$$\frac{\{1-x(AB+B)\}^2}{4} - \frac{\{1-x(AB+B)\}^2}{2} + Ax = 0,$$

$$\{1-x(AB+B)\}^2 - 4Ax = 0.$$

Daraus folgt:

$$x^2(AB+B)^2 - x(4A+2AB+2B) + 1 = 0,$$

$$x = \frac{4A+2AB+2B \pm \sqrt{(4A+4AB+2B)^2 - 4(AB+B)^2}}{2(AB+B)^2}.$$

Die Reihe $s = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \gamma_4 x^4 + \cdots$ konvergiert also, wenn

$$(8) \qquad |x| < \frac{2A+AB+B-\sqrt{(2A+2AB+B)^2-(AB+B)^2}}{(AB+B)^2}.$$

Was läßt sich aus dieser Ungleichung für die Reihe

$$(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots)$$

schließen?

Die rechte Seite von (8) enthält nur bekannte Größen, die sich numerisch berechnen lassen. Die ganze rechte Seite von (8) hat somit einen bestimmten numerischen Wert, der mit T bezeichnet sei.

Sollte $T > 1$ sein, so konvergiert die Reihe

$$(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots)$$

offenbar für jede beliebige ganze Zahl g, die größer als 1 ist; denn dann ist $\frac{1}{g}$, das jetzt an die Stelle von x tritt, stets $< T$.

Ist $T < 1$, so gibt es stets eine positive ganze Zahl n derart, daß

$$\frac{1}{n} < T.$$

Die Reihe $(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots)$ konvergiert dann, falls g so gewählt war, daß

$$\frac{1}{g} \leqq \frac{1}{n},$$

d. h.

$$g \geqq n$$

ist.

Es kann jedoch sehr wohl eintreten, daß die anfangs festgelegte Zahl g die eben aufgestellte Bedingung nicht erfüllt, daß vielmehr

$$g < n$$

ist.

In diesem Falle ist der Konvergenzbeweis für die Reihe

$$(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots)$$

nicht erbracht, und es fragt sich, ob man überhaupt durch irgendwelche neue Voraussetzungen erreichen kann, daß die Reihe wirklich konver-

giert. Insbesondere wird man nachweisen müssen, daß nach Vorgabe einer beliebigen Grundzahl $g \geqq 2$, stets eine konvergente Reihe

$$c_0 g^\nu + c_1 g^{\nu-1} + c_2 g^{\nu-2} + \cdots$$

gebildet werden kann.

Einen Beweis dafür kann man — ausgehend von Ungleichung (8) — tatsächlich erbringen. Die Betrachtungen gestalten sich jedoch ziemlich langwierig und umständlich, da die rechte Seite von (8) verhältnismäßig viele Glieder enthält. Bequemer und in mancher Hinsicht einfacher gelangt man zum Ziele, wenn man die zuletzt angestellten Überlegungen in anderer Weise modifiziert. Wir werden dadurch eine etwas andere Konvergenzbedingung erhalten, die jedoch als Verallgemeinerung derjenigen aufgefaßt werden kann, die für den Fall der Quadratwurzelausziehung bei „Lüroth“ S. 147 gegeben wurde.

§ 4.

Zweiter Konvergenzbeweis.

Wir kehren zurück zu den Gleichungen (VII)

$$\text{(VII)} \qquad \begin{aligned} c_1' &= \mathsf{A}, \\ c_2' &= \mathsf{A} + \mathsf{B}\{|c_1^{\,2}| + |c_1|\}, \\ c_3' &= \mathsf{A} + \mathsf{B}\{|c_1^{\,3}| + |c_1^{\,2}c_1| + |c_1 c_1| + |c_1 c_2| + |c_2|\}, \\ &\vdots \\ c_\mu' &= \mathsf{A} + \mathsf{B}\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu}} |c_1^{\alpha} c_2^{\beta}| \ldots |c_\varrho^{\lambda}|\Big\}. \end{aligned}$$

A war definiert als die größere der beiden Zahlen A' und 2.

Sollte $\mathsf{A} = \mathsf{A}'$ sein, so können wir wieder setzen:

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}' = \frac{R}{|A|}, \quad \text{sowie} \quad \mathsf{B} = \frac{S}{|A|}.$$

Ist dagegen $\mathsf{A} = 2$, so definiere man eine neue Größe R' durch die Gleichung:

$$R' = 2|A|$$

und setze

$$\mathsf{A} = 2 = \frac{2|A|}{|A|} = \frac{R'}{|A|}.$$

Wir wollen jetzt in die Gleichungen (VII) für A und B die Ausdrücke einsetzen:

$$\mathsf{A} = \frac{R_1}{|A|}, \quad \mathsf{B} = \frac{S}{|A|},$$

wobei

$$R_1 = R \text{ ist, falls } \mathsf{A} = \mathsf{A}' = \frac{R}{A};$$

dagegen

$$R_1 = R' = 2|A|, \quad \text{falls} \quad \mathsf{A} = 2 = \frac{2|A|}{|A|}$$

sein sollte.

Ferner führen wir auf der rechten Seite von (VII) an Stelle der Zahlen $|c_\nu|$ die größeren Werte c_ν' ein; dadurch kommen wir zu folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
c_1' &= \frac{R_1}{|A|}, \\
c_2' &< \frac{R_1}{|A|} + \frac{S}{|A|}\{c_1'^2 + c_1'\}, \\
c_3' &< \frac{R_1}{|A|} + \frac{S}{|A|}\{c_1'^3 + c_1'^2 + c_1' + c_1' c_2' + c_2'\}, \\
&\vdots \\
c_\mu' &< \frac{R_1}{|A|} + \frac{S}{|A|}\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}\Big\}.
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Ungleichungen mit $|A|$, so ist:

$$\begin{aligned}
&c_1'|A| = R_1, \\
&c_2'|A| < R_1 + S\{c_1'^2 + c_1'\}, \\
&c_3'|A| < R_1 + S\{c_1'^3 + c_1'^2 + c_1' + c_1' c_2' + c_2'\}, \\
&\vdots \\
&c_\mu'|A| < R_1 + S\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}\Big\}.
\end{aligned} \tag{IX}$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß für die Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ die Ungleichung gilt:

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} < \frac{m+2}{2} \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda = m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda = m+\mu-2}} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}.$$

Um diese Beziehung zu verifizieren, leiten wir zunächst für

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$$

eine weitere Relation ab.

Wir schreiben $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ in etwas anderer Form, indem wir

diejenigen Monome, in denen $\alpha + 2\beta + \cdots + \varrho\lambda = \mu$ ist, getrennt von den übrigen zusammenfassen. Dann ist

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda = \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} + \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}.$$

In der zweiten Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ ist es richtig

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda \leqq m - 1$$

zu schreiben, wie wir es auch getan haben; denn ein Glied $(c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda})$, bei dem $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = m$ und $\alpha + 2\beta + \cdots + \varrho\lambda \leqq \mu - 1$ ist, kann nicht vorkommen, da $(c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda})$ bzw. $|c_1^{\alpha}||c_2^{\beta}| \ldots |c_\varrho^{\lambda}|$ mit $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = m$ von $(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots)^m$ herrührt. Jedes Glied aber, das von diesem Ausdruck in die rechte Seite der Gleichung

$$c_\mu' |A| = R + S\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu}} |c_1^{\alpha}||c_2^{\beta}| \cdots |c_\varrho^{\lambda}|\}$$

bzw. in die Ungleichung

$$c_\mu' |A| < R + S\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \cdots c_\varrho'^{\lambda}\}$$

eingeht, muß das Gewicht $\alpha + 2\beta + \cdots + \varrho\lambda = \mu$ haben, wie dies schon öfters betont wurde.

Wie entsteht nun die Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ bzw. die in dieser enthaltene Teilsumme $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda = \mu-\nu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$, wobei das für die Summation verwendete ν eine der Zahlen $1, 2, 3, \cdots, \mu - 1$ ist, aus $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda = \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$?

Achten wir bei $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda = \mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ nur auf diejenigen Summanden, in denen c_1' vorkommt, und lassen aus diesen jeweils c_1' einmal als Faktor weg, so erhalten wir offenbar Monome von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda = \mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$.

Man könnte nun glauben, daß es noch andere Monome gäbe, die auch zu $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda = \mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ gehörten, jedoch unter den eben gewonnenen nicht enthalten sind.

Angenommen $(c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda})$ sei ein solches. Durch Hinzufügen von c_1' als Faktor erhalten wir das Glied $(c_1'^{\alpha+1} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda})$, indem

$$\alpha + 1 + \beta + \dots + \lambda \lesseqgtr m$$

und $\alpha + 1 + 2\beta + \dots + \varrho\lambda = \mu$ ist, das somit zu $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}$ gehört. Durch unsere Annahme entsteht also ein Widerspruch, und man erhält demnach alle Monome von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m-1 \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}$, indem man diejenigen Summanden von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}$, die c_1' enthalten, zusammenfaßt und aus diesen c_1' je einmal als Faktor wegläßt. Deshalb gilt auch die Ungleichung:

$$c_1' \{ \sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m-1 \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda} \} < \sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}.$$

Wie entsteht nun allgemein $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m-1 \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu-\nu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}$, wo ν eine der Zahlen $2, 3, \dots \mu - 1$ bedeutet, aus $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}$?

Offenbar entstehen Monome von der verlangten Form, wenn man aus jedem Summanden von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}$, in dem c_ν' auftritt, dieses einmal als Faktor wegläßt.

Wir werden jetzt zeigen, daß auf diese Art alle möglichen Monome von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m-1 \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu-\nu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}$ erhalten werden.

Angenommen $(c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda})$ sei ein Monom von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m-1 \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu-\nu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}$, das nicht unter den schon gewonnenen enthalten ist. Durch Hinzufügen des Faktors c_ν' entsteht $(c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\nu' \dots c_\varrho'^{\lambda})$, wobei

$$\alpha + \beta + \dots + 1 + \dots + \lambda \lesseqgtr m \text{ und } \alpha + 2\beta + \dots + \nu + \dots + \varrho\lambda = \mu$$

geworden ist; d. h. das Monom $(c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\nu' \dots c_\varrho'^{\lambda})$ gehört zu

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}.$$

Unsere Annahme ist demnach nicht richtig, und es ist gezeigt, daß $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m-1 \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu-\nu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}$ in der Weise aus $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\dots+\lambda \lesseqgtr m \\ \alpha+2\beta+\dots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \dots c_\varrho'^{\lambda}$ erhalten werden

kann, daß man in letzterer Summe diejenigen Monome, die c_ν' enthalten, zusammenfaßt und aus ihnen jeweils c_ν' einmal als Faktor streicht.

Deshalb besteht auch die Relation:

$$c_\nu' \{ \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu-\nu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} \} < \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}.$$

Nun ist der Grad eines jeden Summanden von

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} \qquad \text{gleich } \alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m,$$

d. h. jedes Monom, das in dieser Summe auftritt, kann höchstens m der Größen $c_1', c_2', c_3', \ldots, c_{\mu-1}'$ als Faktoren enthalten, einzelne eventuell mehrfach.

Die Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ wollten wir uns so aus $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ entstanden denken, daß wir jeweils einmal den Faktor c_1' bzw. c_2' bzw. c_3' ... wegließen. Da also jeder Summand von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ höchstens m Faktoren haben kann, so können wir aus jedem Monom dieser Summe höchstens m mal je einen Faktor weglassen, d. h. aus jedem Summanden von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ können höchstens m Monome von

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda \leqq \mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$$

entstehen.

Gegeben sei z. B. das Monom $(c_1'^2 c_3' c_4'^3 c_5'^2)$. Aus diesem können wir dann die folgenden herleiten:

Durch Streichen des Faktors $c_1' \ldots (c_1' c_3' c_4'^3 c_5'^2)$

„ „ „ „ $c_3' \ldots (c_1'^2 c_4'^3 c_5'^2)$

„ „ „ „ $c_4' \ldots (c_1'^2 c_3' c_4'^2 c_5'^2)$

„ „ „ „ $c_5' \ldots (c_1'^2 c_3' c_4'^3 c_5')$.

Bezeichnen wir für einen Augenblick die Monome, die aus einem Summanden von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$, etwa aus $(c_1'^{\alpha_1} c_2'^{\beta_1} \ldots c_\varrho'^{\lambda_1})$, in der angegebenen Weise entstehen können, mit $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_l$, so muß $l \leqq m$ sein. Wenn uns demnach $(c_1'^{\alpha_1} c_2'^{\beta_1} \ldots c_\varrho'^{\lambda_1})$ m mal zur Verfügung steht, so können wir es einmal dazu benutzen, um durch Streichen eines Faktors das Monom C_1 zu erhalten, ein zweites Mal, um in der gleichen

Weise das Monom C_2 zu erhalten usw., schließlich ein letztes Mal, um C_1 zu erhalten.

Was für einen einzelnen Summanden von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}$ gilt, ist natürlich auch für die ganze Summe richtig; d. h. wenn wir die Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}$ m mal zur Verfügung haben, so können wir jedem Monom von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}$ ein bestimmtes Monom von

$$m\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}\Big\}$$

derartig zuordnen, daß wir aus ihm das betreffende Monom von

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda},$$

auf die oben beschriebene Art hergeleitet denken können. Es muß deshalb die Beziehung stattfinden:

$$c_1'\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}\Big\} + c_2'\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}\Big\} + \cdots + c_{\mu-2}'\{c_1'^2+c_2'\} + c_{\mu-1}'c_1' < m\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}.$$

Da c_1' die kleinste der Zahlen $c_1', c_2', c_3', \ldots, c_{\mu-1}'$ ist, so bleibt diese Ungleichung a fortiori richtig, wenn wir die Größen $c_2', c_3', c_4', \ldots, c_{\mu-1}'$, die linkerhand vor den Summen stehen, durch die kleinere Größe c_1' ersetzen. Dann ist:

$$c_1'\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}\Big\} + c_1'\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}\Big\} + \cdots + c_1'\{c_1'^2+c_2'\} + c_1'\{c_1'\} < m\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda},$$

$$c_1'\Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda} + \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda} + \cdots + (c_1'^2+c_2') + c_1'\Big] < m\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}.$$

Die Summe in der eckigen Klammer ist nichts anderes als

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-1}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda},$$

demnach gilt die Relation:

$$c_1'\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-1}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}\} < m\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}.$$

Nach Definition ist $c_1' \geqq 2$, wir verstärken demnach die letzte Ungleichung noch, wenn wir links die Größe c_1', die vor der Klammer steht, durch 2 ersetzen.

Dann ist:

$$2\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-1}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda} < m\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda},$$

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-1}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\cdots c_\varrho'^{\lambda} < \frac{m}{2}\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\cdots c_\varrho'^{\lambda}.$$

Für die volle Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}$ ergibt sich hieraus folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\cdots c_\varrho'^{\lambda} &= \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\cdots c_\varrho'^{\lambda} + \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu-1}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\cdots c_\varrho'^{\lambda}\\
&< \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\cdots c_\varrho'^{\lambda} + \frac{m}{2}\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\cdots c_\varrho'^{\lambda}\\
&< \frac{m+2}{2}\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\cdots c_\varrho'^{\lambda}.
\end{aligned}$$

Infolge dieser Relation können wir jetzt von den Ungleichungen (IX) auch zu folgendem System übergehen:

$$\begin{aligned}
&c_1'|A| = R_1,\\
&c_2'|A| < R_1 + \frac{m+2}{2}S\{c_1'^2\},\\
&c_3'|A| < R_1 + \frac{m+2}{2}S\{c_1'^3 + c_1'c_2'\},\\
&c_4'|A| < R_1 + \frac{m+2}{2}S\{c_1'^4 + c_1'^2c_2' + c_1'c_3' + c_2'^2\},\\
&c_5'|A| < R_1 + \frac{m+2}{2}S\{c_1'^5 + c_1'^3c_2' + c_1'^2c_3' + c_1'c_4' + c_1'c_2'^2 + c_2'c_3'\}\\
&\vdots\\
&c_\mu'|A| < R_1 + \frac{m+2}{2}S\Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha}c_2'^{\beta}\cdots c_\varrho'^{\lambda}\Big\}.
\end{aligned} \tag{IXa}$$

Es sei hier nochmals hervorgehoben, daß in der rechterhand auftretenden Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\geqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ das Glied c_μ' nach Definition nicht auftreten kann; daraus folgt, daß der Grad eines jeden in dieser Summe enthaltenen Monoms mindestens 2 sein muß.

Wir werden jetzt den Nachweis führen, daß für die Summe

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\geqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$$

die Beziehung stattfindet:

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\geqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} < \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu+m-2}} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}.$$

Um diese Ungleichung zu verifizieren, schreiben wir die Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\geqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ ausführlicher in der Form:

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\geqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} + \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m-1\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} + \cdots$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=3\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} + \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=2\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu.}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$$

In den einzelnen Monomen der Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\geqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ kann offenbar keine Größe c_ν' vorkommen, bei der der Index ν größer als

$$\mu - (m-1) = \mu - m + 1$$

ist. Denn lassen wir in einem solchen Monom c_ν' einmal als Faktor weg, so ist der Grad des Restfaktors $m-1$, und das Gewicht des Restfaktors ist also mindestens auch $m-1$.

Das Gewicht des ursprünglichen Monomes ist also mindestens

$$\nu + m - 1;$$

wäre demnach $\nu > \mu - m + 1$, so wäre auch

$$\nu + m - 1 > \mu - m + 1 + m - 1$$
$$> \mu,$$

und man hätte gar kein Monom der Summe $\sum_{\substack{\alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu\\ \alpha+\beta+\cdots+\lambda=m}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ gehabt.

Von den einzelnen Monomen der Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ kann

man somit in der Weise zu solchen der Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ gelangen, daß man in jedem Summanden von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ diejenige Größe c_ν', die den größten Index ν hat, einmal als Faktor herausnimmt und durch die Größe $c_{\nu+m-2}'$ ersetzt. Dadurch geht das Gewicht der einzelnen Monome von μ auf $m+\mu-2$ über, und nach dem Vorangegangenen muß $\nu+m-2 \leqq \mu-1$ sein.

In der angegebenen Weise entstehen lauter verschiedene Monome von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$; denn die Gleichheit zweier Monome würde rückwärts die Gleichheit zweier Summanden von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ bedeuten, was ausgeschlossen ist.

Die so erhaltenen Monome von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ mögen der Reihe nach durch

$$C_m^1,\ C_m^2,\ C_m^3,\ \ldots,\ C_m^{l_m}$$

bezeichnet werden und symbolisch unter dem Zeichen $\sum C_m$ zusammengefaßt sein.

In den einzelnen Monomen der Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m-n \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$, wobei n eine der Zahlen $1, 2, 3, \cdots (m-2)$ bedeutet, kann keine Größe c_ν' auftreten, deren Index $\nu > \mu+n+1-m$ ist; denn sonst müßte notwendigerweise das Gewicht des betreffenden Monoms $> \mu$ sein, was unmöglich ist.

Jeden Summanden von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m-n \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ multiplizieren wir jetzt mit $c_1'^{n}$, dadurch erhalten wir die neue Summe $\{c_1'^{n} \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m-n \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}\}$, in der nunmehr jedes Monom vom Grade m ist und das Gewicht $\mu+n$ hat.

Sollte $n=m-2$ gewesen sein, so sind auf diese Weise Monome von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ entstanden, die sämtlich unter sich verschieden sind.

Ist $n < m-2$, so muß man, um zu lauter verschiedenen Summanden von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ zu gelangen, in den homogen gemachten Monomen

von $\sum_{\substack{\alpha+n+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+n+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu+n}} c_1'^{\alpha+n} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ noch jeweils diejenige Größe c_ν', die den größten Index ν hat, einmal herausnehmen und durch $c'_{\nu+m-2-n}$ ersetzen. Dabei bleibt $\nu + m - 2 - n \leqq \mu - 1$, wie aus dem Vorausgegangenen folgt.

Die einzelnen Monome von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$, die so aus $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m-n \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ entstanden sind, mögen der Reihe nach mit

$$C_{m-n}^1, \; C_{m-n}^2, \; C_{m-n}^3, \; \ldots, \; C_{m-n}^{h(m-n)}$$

bezeichnet werden und symbolisch unter dem Zeichen $\sum C_{m-n}$ zusammengefaßt sein.

Es ist also stets möglich, von der Summe:

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} + \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} + \cdots$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=3 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda} + \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=2 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$$

zu der Summe:

$$\sum C_m + \sum C_{m-1} + \sum C_{m-2} + \cdots + \sum C_3 + \sum C_2$$

zu gelangen, wobei jeder Summand dieser neuen Summe vom Grade m ist und das Gewicht $m + \mu - 2$ hat. Außerdem enthält keine der Teilsummen $\sum C_m, \sum C_{m-1}, \sum C_{m-2}, \ldots, \sum C_3, \sum C_2$ ein Glied mehrfach. Wenn demnach bei dem Übergang von den Monomen der Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ zu solchen, die der Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ angehören, einzelne der neu entstandenen mehrfach auftreten, so müssen sie sich so auf die Summen $\sum C_m, \sum C_{m-1}, \sum C_{m-2}, \ldots, \sum C_3, \sum C_2$ verteilen, daß sie in jeder dieser Summe nur einmal vorkommen.

Daraus folgt, daß man stets erreichen kann, daß ein Monom von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$ höchtens $(m-1)$ mal entsteht.

Ferner muß jedes Monom, das mehr als einmal vorkommt, den Faktor c_1' haben; denn alle Summanden von $\sum C_{m-1}, \sum C_{m-2}, \ldots, \sum C_2$ enthalten nach Art ihrer Entstehung diesen Faktor, und ein Monom von $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$, das doppelt entsteht, muß mindestens in einer der Summen $\sum C_{m-1}, \sum C_{m-2}, \sum C_{m-3}, \ldots, \sum C_2$ enthalten sein.

Ist $m + \mu - 2$ durch m teilbar, so enthält die Summe

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \ldots c_\varrho'^{\lambda}$$

auch das Monom $c_\sigma'^{m}$, falls $\sigma = \frac{m+\mu-2}{m}$ ist. Dieses Monom kann nach dem Vorangegangenen somit nur dann mehrfach entstehen, wenn

$$\sigma = 1, \quad \text{d. h. } m\sigma = m = m + \mu - 2,$$

also $\mu = 2$ ist.

Für $\mu = 2$ ist aber

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \cdots c_\varrho'^{\lambda} = c_1'^{2}$$

und

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m}} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\, c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \cdots c_\varrho'^{\lambda} = c_1'^{m},$$

d. h.

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=2}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \cdots c_\varrho'^{\lambda} < \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m}} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\, c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \cdot \cdots \cdot c_\varrho'^{\lambda}.$$

Sehen wir von dem Fall $\mu = 2$ ab, so gilt für die Summe:

$$\sum C_m + \sum C_{m-1} + \cdots + \sum C_3 + \sum C_2$$

demnach die Relation:

$$\{\sum C_m + \sum C_{m-1} + \sum C_{m-2} + \cdots + \sum C_3 + \sum C_2\} < \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\, c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \cdots c_\varrho'^{\lambda};$$

denn rechterhand steht, abgesehen von dem Gliede $c_\sigma'^{m}$, das auch links nur einmal auftreten kann, jedes Monom mindestens m mal, da die Polynomialkoeffizienten $\geqq m$ sind, wo hingegen linkerhand jedes Monom höchstens $(m-1)$ mal auftreten könnte.

Da

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \cdots c_\varrho'^{\lambda} < \{\sum C_m + \sum C_{m-1} + \sum C_{m-2} + \cdots + \sum C_2\},$$

so gilt a fortiori:

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda \leqq m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \cdots c_\varrho'^{\lambda} < \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\, c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta} \cdots c_\varrho'^{\lambda}.$$

Da diese Ungleichung auch für $\mu = 2$ richtig war, so gilt sie demnach ganz allgemein, was zu beweisen war.

In die Ungleichungen (IXa) führen wir jetzt an Stelle der rechts auftretenden Summen $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}$ die größeren

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\, c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}$$

ein. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\text{(X)}\qquad \begin{aligned}
&c_1'\,|A| = R_1,\\
&c_2'\,|A| < R_1 + \frac{m+2}{2} S\{c_1'^{m}\},\\
&c_3'\,|A| < R_1 + \frac{m+2}{2} S\{m c_1'^{m-1} c_2'\},\\
&c_4'\,|A| < R_1 + \frac{m+2}{2} S\left\{m c_1'^{m-1} c_3' + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} c_1'^{m-2} c_2'^{2}\right\},\\
&\quad\vdots\\
&c_\mu'\,|A| < R_1 + \frac{m+2}{2} S\left\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\, c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}\right\}.
\end{aligned}$$

Ist die ursprüngliche Gleichung (1) eine reine Gleichung, so kann man auf der rechten Seite von Gleichungen (X) den Faktor $\frac{m+2}{2}$ streichen, da alsdann die ganze Betrachtung von S. 23—28 unnötig ist. Denn schon von Anfang an ist in diesem Falle die Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu}} |c_1^{\alpha}|\,|c_2^{\beta}|\ldots|c_\varrho^{\lambda}|$ identisch mit der Summe $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} |c_1^{\alpha}|\,|c_2^{\beta}|\ldots|c_\varrho^{\lambda}|$, also auch $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda\leqq\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}$ identisch mit $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda\leqq m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu}} c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}$.

In diesem speziellen Falle gehen somit die Ungleichungen (X) in die nachstehenden über:

$$\text{(Xa)}\qquad \begin{aligned}
&c_1'\,|A| = R_1,\\
&c_2'\,|A| < R_1 + S\{c_1'^{m}\},\\
&c_3'\,|A| < R_1 + S\{m c_1'^{m-1} c_2'\},\\
&\quad\vdots\\
&c_\mu'\,|A| < R_1 + S\left\{\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m\\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\, c_1'^{\alpha} c_2'^{\beta}\ldots c_\varrho'^{\lambda}\right\}.
\end{aligned}$$

Man definiere jetzt die Größen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 |A| = R_1, \\
&\gamma_2 |A| = R_1 + \tfrac{m+2}{2} S\gamma_1^m, \\
&\gamma_3 |A| = R_1 + \tfrac{m+2}{2} S(m\gamma_1^{m-1}\gamma_2), \\
&\vdots \\
&\gamma_\mu |A| = R_1 + \tfrac{m+2}{2} S\Big\{ \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} \frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta \ldots \gamma_\varrho^\lambda \Big\},
\end{aligned} \tag{XI}$$

bzw. wenn man es anfänglich mit einer reinen Gleichung zu tun hatte, durch:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 |A| = R_1, \\
&\gamma_2 |A| = R_1 + S\gamma_1^m, \\
&\gamma_3 |A| = R_1 + Sm\gamma_1^{m-1}\gamma_2, \\
&\gamma_4 |A| = R_1 + S\Big\{ m\gamma_1^{m-1}\gamma_3 + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\gamma_1^{m-2}\gamma_2^2 \Big\}, \\
&\vdots \\
&\gamma_\mu |A| = R_1 + S\Big\{ \sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=m+\mu-2}} \frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta \ldots \gamma_\varrho^\lambda \Big\}.
\end{aligned} \tag{XIa}$$

Diese Gleichungen (XI), (XIa) liefern für die so definierten γ_ν der Reihe nach:

$$\gamma_1 = c_1', \quad \gamma_2 > c_2', \quad \gamma_3 > c_3', \quad \gamma_4 > c_4', \ldots, \gamma_\nu > c_\nu', \ldots$$

Zwischen den Größen $|c_\nu|$ und c_ν' fand die Beziehung statt:

$$|c_\nu| < c_\nu'.$$

Demnach ist auch:

$$|c_\nu| < \gamma_\nu. \qquad \nu = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

Wir wollen den folgenden Betrachtungen die Gleichungen (XI) zugrunde legen, während wir für die Gleichungen (XIa) lediglich die Resultate angeben werden.

Multipliziert man die Gleichungen (XI) der Reihe nach mit x^{m-1}, x^m, x^{m+1}, x^{m+2}, ... und addiert, so ergibt sich, wenn

$$\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \cdots = s$$

gesetzt wird und man die Variable $|x|$ kleiner als 1 annimmt:

$$s|A|x^{m-2} = R_1 \frac{x^{m-1}}{1-x} + \frac{m+2}{2} S s^m. \tag{9}$$

Die Entwicklung von s in eine unendliche Reihe ist konvergent, so lange x innerhalb eines Kreises sich befindet, der um den Nullpunkt bis

zum nächstliegenden Verzweigungspunkt geschlagen ist. Die Gleichung für die Doppelpunkte wird erhalten, indem wir in (9) die Ableitung nach s bilden:

$$m\,\frac{m+2}{2}\,Ss^{m-1} = |A|\,x^{m-2}$$

und den daraus berechneten Wert für s:

$$s = \sqrt[m-1]{\frac{A\;x^{m-2}2}{m(m+2)S}}$$

in die Gleichung (9) einführen. Dies ergibt:

$$x^{m-2}|A|\sqrt[m-1]{\frac{|A|\,x^{m-2}2}{m(m+2)S}} = R_1\,\frac{x^{m-1}}{1-x} + \frac{m+2}{2}\,S\left\{\sqrt[m-1]{\frac{|A|\,x^{m-2}2}{m(m+2)S}}\right\}^m,$$

$$x^{m-2}|A|\sqrt[m-1]{\frac{|A|\,x^{m-2}2}{m(m+2)S}} = R_1\,\frac{x^{m-1}}{1-x} + \frac{1}{m}\,|A|\,x^{m-2}\sqrt[m-1]{\frac{|A|\,x^{m-2}2}{m(m+2)S}},$$

$$|A|\sqrt[m-1]{\frac{|A|\,x^{m-2}2}{m(m+2)S}} = R_1\,\frac{x}{1-x} + \frac{|A|}{m}\sqrt[m-1]{\frac{|A|\,x^{m-2}2}{m(m+2)S}},$$

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)|A|\sqrt[m-1]{\frac{|A|\,x^{m-2}2}{m(m+2)S}} = R_1\,\frac{x}{1-x}.$$

Bilden wir beiderseits die $(m-1)^{\text{te}}$ Potenz, so ist:

$$\frac{(m-1)^{m-1}|A|^{m-1}|A|\,x^{m-2}2}{m^{m-1}m(m+2)S} = {R_1}^{m-1}\,\frac{x^{m-1}}{(1-x)^{m-1}}$$

$$\frac{x}{(1-x)^{m-1}} = \frac{2(m-1)^{m-1}|A|^m}{(m+2)\,m^m\,{R_1}^{m-1}S} \tag{10}$$

bzw.

$$x = (1-x)^{m-1}\,\frac{2(m-1)^{m-1}|A|^m}{(m+2)m^m\,{R_1}^{m-1}S}.$$

Ist Gleichung (1) eine reine Gleichung, so treten an Stelle dieser Gleichungen die nachstehenden:

$$\frac{x}{(1-x)^{m-1}} = \frac{(m-1)^{m-1}|A|^m}{m^m S\,{R_1}^{m-1}} \tag{10 a}$$

bzw.

$$x = (1-x)^{m-1}\,\frac{(m-1)^{m-1}|A|^m}{m^m S\,{R_1}^{m-1}}.$$

§ 5.

Diskussion der Gleichung $\varphi(x) = x - (1-x)^{m-1}a$.

Für das Folgende bezeichnen wir die rechte Seite von Gleichung (10) bzw. (10 a), nämlich den Ausdruck:

$$\frac{2(m-1)^{m-1}|A|^m}{(m+2)\,m^m S\,{R_1}^{m-1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{(m-1)^{m-1}|A|^m}{m^m S\,{R_1}^{m-1}},$$

abgekürzt durch a; dabei ist zu beachten, daß a nach Definition der Größen $|A|$, S, R_1 stets positiv ist.

Es wird sich zunächst darum handeln, zu untersuchen, wie viele positive Wurzeln die Gleichung

$$\varphi(x) = x - (1-x)^{m-1} a = 0$$

hat, und dann nachzuweisen, daß $x_1 > \frac{1}{g}$ gemacht werden kann, wenn x_1 die kleinste dieser Wurzeln bedeutet. Hiermit ist dann offenbar die Konvergenz der Reihe

$$c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots$$

vollkommen bewiesen.

Um die Frage nach den reellen Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ zu beantworten, kann man den Fourierschen Satz anwenden, der mit Hilfe der Abgeleiteten von $\varphi(x)$ eine obere Grenze für die Anzahl der reellen Wurzeln liefert, die zwischen zwei gegebenen Grenzen liegen.

Nach diesem Satze findet man, daß zwischen $-\infty$ und 0 keine reelle Wurzel von $\varphi(x) = 0$ gelegen ist; dagegen stets eine im Intervall $0 \cdots 1 - h$, wobei h eine von Null beliebig wenig verschiedene positive Größe ist. Ist m ungerade, so liegt auch noch zwischen $1 + h$ und $+\infty$ eine reelle Wurzel, dagegen keine, wenn m gerade ist.

Die zu untersuchende Reihe $c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots$ konvergiert demnach, sobald $\frac{1}{g} < x_1$ ist, wenn x_1 die zwischen 0 und $1 - h$ gelegene Wurzel von $\varphi(x) = 0$ ist; denn g muß mindestens gleich 2 gewählt werden, so daß $\frac{1}{g}$ stets kleiner als 1 ist.

Wir werden demnach lediglich nachweisen müssen, daß unter geeigneter Voraussetzung über c_0 stets $\frac{1}{g} < x_1$ wird.

Um nachzuweisen, daß zwischen 0 und $1 - h$ nur eine Wurzel von $\varphi(x) = 0$ liegt, wenden wir den Fourierschen Satz auf das Intervall $0 \cdots 1 - h$ an, wobei h die oben angegebene Bedeutung hat.

Die Ableitungen von $\varphi(x)$ lauten:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x - (1-x)^{m-1} a, \\
\varphi'(x) &= 1 + (m-1)(1-x)^{m-2} a, \\
\varphi''(x) &= -(m-1)(1-x)^{m-3} a, \\
&\vdots \\
\varphi^{(m-2)}(x) &= (-1)^{m-1} 2 \cdot 3 \cdots (m-1)(1-x) a, \\
\varphi^{(m-1)}(x) &= (-1)^m 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) a.
\end{aligned}$$

Die beiden Reihen:

1. $\operatorname{sgn}\varphi(0), \quad \operatorname{sgn}\varphi'(0), \quad \operatorname{sgn}\varphi''(0), \quad \ldots, \operatorname{sgn}\varphi^{(m-1)}(0),$
2. $\operatorname{sgn}\varphi(1-h), \operatorname{sgn}\varphi'(1-h), \operatorname{sgn}\varphi''(1-h), \ldots, \operatorname{sgn}\varphi^{(m-1)}(1-h),$

wobei sgn das Vorzeichen bedeutet, sind:

$$\begin{array}{ll} 1. & - + - + - + - + \cdots \\ 2. & + + - + - + - + \cdots \end{array}$$

Da die zweite Reihe genau einen Vorzeichenwechsel weniger als die erste Reihe hat, so können wir nach Fourier schließen, daß zwischen 0 und $1-h$ eine und nur eine reelle Wurzel von $\varphi(x) = 0$ liegt. Diese Wurzel x_1 wird insbesondere zwischen $\frac{1}{g}$ und $1-h$ liegen, wenn die beiden Reihen:

1. $\operatorname{sgn}\varphi\left(\frac{1}{g}\right), \quad \operatorname{sgn}\varphi'\left(\frac{1}{g}\right), \quad \operatorname{sgn}\varphi''\left(\frac{1}{g}\right), \quad \cdots, \operatorname{sgn}\varphi^{(m-1)}\left(\frac{1}{g}\right),$
2. $\operatorname{sgn}\varphi(1-h), \operatorname{sgn}\varphi'(1-h), \operatorname{sgn}\varphi''(1-h), \ldots, \operatorname{sgn}\varphi^{(m-1)}(1-h)$

in ähnlicher Beziehung zueinander stehen, d. h. wenn die zweite Reihe ebenso wie oben einen Zeichenwechsel weniger hat, wie die erste.

Bilden wir tatsächlich die beiden Reihen, so erhalten wir:

$$\begin{array}{lll} 1. & \operatorname{sgn}\varphi\left(\frac{1}{g}\right), & + - + - + - + \cdots \\ 2. & & +, \quad + - + - + - + \cdots \end{array}$$

Damit ein Zeichenwechsel verloren geht, muß $\operatorname{sgn}\varphi\left(\frac{1}{g}\right) < 0$ sein. Kann man also c_0 derart wählen, daß $\operatorname{sgn}\varphi\left(\frac{1}{g}\right) < 0$ ist, so liegt nach Fourier die Wurzel x_1 zwischen $\frac{1}{g}$ und $1-h$. Alsdann ist:

$$\frac{1}{g} < x_1.$$

Die Bedingung $\operatorname{sgn}\varphi\left(\frac{1}{g}\right) < 0$ besagt aber nichts anderes als:

$$\frac{1}{g} - \left(1 - \frac{1}{g}\right)^{m-1} a < 0,$$

$$a\left(1 - \frac{1}{g}\right)^{m-1} > \frac{1}{g},$$

$$a > \frac{g^{m-2}}{(g-1)^{m-1}}.$$

Wenn es demnach gelingt, durch geeignete Voraussetzung über c_0 den Ausdruck:

$$a = \frac{2(m-1)^{m-1}|A|^m}{(m+2)m^m SR_1{}^{m-1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{(m-1)^{m-1}|A|^m}{m^m SR_1{}^{m-1}}$$

größer als

$$\frac{g^{m-2}}{(g-1)^{m-1}}$$

zu machen, ist die Konvergenz der Reihe:

$$c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots$$

vollkommen bewiesen.

§ 6.

Beweis, daß bei geeigneter Voraussetzung über c_0 der Ausdruck a beliebig groß gemacht werden kann.

Um diesen Nachweis zu führen, sei kurz an die Bedeutung der in a auftretenden Größen $|A|$, S und R_1 erinnert.

A bzw. $|A|$ war definiert durch die Gleichung:

$$|A| = |m c_0^{m-1} + (m-1) c_0^{m-2} b_0' + \cdots + 2 c_0 b_0^{(m-2)} + b_0^{(m-1)}|.$$

(siehe S. 12 oben)

$|A|$ ist demnach eine ganze rationale Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von c_0, die durch Vergrößerung von c_0 beliebig groß gemacht werden kann.

S war eingeführt durch die Gleichung:

$$S = m M \bar{b} c_0^{m-2},$$

wobei M und $\bar{b}$ positive Zahlen bedeuten (siehe S. 17 oben).

R_1 war definiert als die größere der beiden Zahlen $2|A|$ und R (siehe S. 22, 23).

Ist $R_1 = 2|A|$, so erscheint R_1 als ganze rationale Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von c_0; ist dagegen $R_1 = R$, so hat man (vgl. S. 14 unten)

$$R_1 = R = gA' + g + A' + g\{c_0^{m-1} + c_0^{m-2} + c_0^{m-3} + \cdots + c_0\}.$$

A' bedeutet die größere der beiden Zahlen R_0 und $|A|$, wobei

$$R_0 = |r_0| = |a_0 - c_0^m - b_0' c_0^{m-1} - \cdots - b_0^{(m-1)} c_0|$$

zu setzen ist (siehe S. 10 oben). In dieser Form erscheint R_0 und damit auch R_1 als ganze rationale Funktion m^{ten} Grades von c_0.

Wir wollen nun den Nachweis führen, daß bei geeigneter Voraussetzung über c_0 sich $|r_0| = R_0$ und damit auch R_1 stets als ganze rationale Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von c_0 schreiben läßt.

c_0 war eingeführt durch die rationale Zahl C_0, die wir in die Form brachten:

$$C_0 = c_0 g^p.$$

Über C_0 war nur vorausgesetzt, daß es rational und der Ungleichung genügen solle:

$$0 < C_0 < x_1,$$

wenn x_1 die zu bestimmende positive Wurzel von $f(x) = 0$ bedeutete.

Wir setzen jetzt voraus, die rationale Zahl C_0 sei so bekannt, daß die Relation stattfindet:

$$C_0 = c_0 g^p < x_1 < (c_0 + 1) g^p;$$

dabei wird nicht verlangt, daß zwischen $c_0 g^p$ und $(c_0 + 1) g^p$ nur die eine Wurzel x_1 der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ liege. Es kann unter Umständen der Fall eintreten, daß durch $c_0 g^p$ und $(c_0 + 1) g^p$ ein Intervall abgegrenzt ist, in dem mehrere reelle Wurzeln von $f(x) = 0$ liegen. Hat beispielsweise die Gleichung $f(x) = 0$ unter andern die beiden Wurzeln: 0,04346 und 0,04457, so könnte man, um der eben eingeführten Bedingung zu genügen, $c_0 = 4$ wählen. Im Intervall $c_0 g^{-2}$ bis $(c_0 + 1) g^{-2}$, d. h. $4 \cdot 10^{-2}$ bis $5 \cdot 10^{-2}$ liegen alsdann die beiden angeführten Wurzeln. Im Dezimalsystem würde unsere Voraussetzung demnach bedeuten, daß mindestens die erste von Null verschiedene Dezimale der zu bestimmenden Wurzel bekannt sein muß.

Ob freilich die eben festgelegte Bedingung zur Konvergenz der Reihe: $c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots$ genügt, ist wieder eine Frage für sich, die wir erst später beantworten werden.

Nach Voraussetzung soll die Beziehung stattfinden:

$$c_0 g^p \leqq x_1 < (c_0 + 1) g^p.$$

Führen wir jetzt eine Größe δ ein durch die Gleichung:

$$(c_0 + \delta) g^p = c_0 g^p + \delta g^p = x_1,$$

so liegt dieselbe, wie aus der gemachten Voraussetzung über c_0 hervorgeht, zwischen 0 und 1, mit Einschluß der Grenze Null.

Setzen wir $x_1 = c_0 g^p + \delta g^p$ in die Gleichung

$$f(x) = x^m + b' x^{m-1} + b'' x^{m-2} + \cdots + b^{(m-1)} x - a$$

ein, so erhalten wir:

$$(11) \quad (c_0 g^p + \delta g^p)^m + b' (c_0 g^p + \delta g^p)^{m-1} + \cdots + b^{(m-1)} (c_0 g^p + \delta g^p) - a \equiv 0.$$

Die Größen $b', b'', b''', \ldots, b^{(m-1)}$ sowie a hatten wir in die Form gebracht:

$$\begin{aligned}
b' &= b_0' g^p + b_1' g^{p-1} + b_2' g^{p-2} + b_3' g^{p-3} + \cdots, \\
b'' &= b_0'' g^{2p} + b_1'' g^{2p-1} + b_2'' g^{2p-2} + b_3'' g^{2p-3} + \cdots, \\
b''' &= b_0''' g^{3p} + b_1''' g^{3p-1} + b_2''' g^{3p-2} + b_3''' g^{3p-3} + \cdots, \\
&\vdots \\
b^{(m-1)} &= b_0^{(m-1)} g^{(m-1)p} + b_1^{(m-1)} g^{(m-1)p-1} + b_2^{(m-1)} g^{(m-1)p-2} + \cdots, \\
a &= a_0 g^{mp} + a_1 g^{mp-1} + a_2 g^{mp-2} + \cdots.
\end{aligned}$$

Dabei bestanden die Relationen:

$$|b_\nu^{(\varkappa)}| < g, \quad |a_\nu| < g. \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots$$

Schreiben wir demnach b', b'', b''', ..., $b^{(m-1)}$, a in der Form:

$$\begin{aligned} b' &= b_0' g^p + \beta' g^p \\ b'' &= b_0'' g^{2p} + \beta'' g^{2p}, \\ &\vdots \\ b^{(m-1)} &= b_0^{(m-1)} g^{(m-1)p} + \beta^{(m-1)} g^{(m-1)p}, \\ a &= a_0 g^{mp} + \alpha g^{mp}, \end{aligned}$$

so genügen die neu eingeführten Größen α, β', β'', ..., $\beta^{(m-1)}$ den Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &\leqq |\beta^{(\nu)}| < 1, \\ 0 &\leqq |\alpha| < 1. \end{aligned}$$

An Stelle der Größen b', b'', ..., $b^{(m-1)}$, a führen wir jetzt in die Gleichung (11) die eben gefundenen ein, dann ist:

$$\begin{aligned} (c_0 g^p + \delta g^p)^m + (b_0' g^p + \beta' g^p)(c_0 g^p + \delta g^p)^{m-1} + \cdot\cdot \\ \cdot\cdot + (b_0^{(m-1)} g^{(m-1)p} + \beta^{(m-1)} g^{(m-1)p})(c_0 g^p + \delta g^p) \\ - (a_0 g^{mp} + \alpha g^{mp}) \equiv 0. \end{aligned}$$

Durch Division mit g^{mp} erhalten wir:

$$\begin{aligned} (12)\quad (c_0+\delta)^m + (b_0'+\beta')(c_0+\delta)^{m-1} + \cdot\cdot \\ \cdot\cdot + (b_0^{(m-1)} + \beta^{(m-1)})(c_0+\delta) - a_0 - \alpha \equiv 0. \end{aligned}$$

Nach Definition war:

$$r_0 = a_0 - (c_0^m + b_0' c_0^{m-1} + b_0'' c_0^{m-2} + \cdots + b_0^{(m-1)} c_0)$$

oder:

$$r_0 - a_0 + c_0^m + b_0' c_0^{m-1} + b_0'' c_0^{m-2} + \cdots + b_0^{(m-1)} c_0 \equiv 0.$$

Setzen wir in Gleichung (12) rechter Hand für Null diesen eben erhaltenen Ausdruck, so ist:

$$\begin{aligned} (c_0+\delta)^m + (b_0'+\beta')(c_0+\delta)^{m-1} + \cdots + (b_0^{(m-1)} + \beta^{(m-1)})(c_0+\delta) - a_0 - \alpha \\ = c_0^m + b_0' c_0^{m-1} + b_0'' c_0^{m-2} + \cdots + b_0^{(m-1)} c_0 - a_0 + r_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} r_0 = (c_0+\delta)^m + (b_0'+\beta')(c_0+\delta)^{m-1} + \cdots + (b_0^{(m-1)} + \beta^{(m-1)})(c_0+\delta) - a_0 - \alpha \\ - [c_0^m + b_0' c_0^{m-1} + b_0'' c_0^{m-2} + \cdots + b_0^{(m-1)} c_0 - a_0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_0 = m c_0^{m-1}\delta + \binom{m}{2} c_0^{m-2}\delta^2 + \cdots + m c_0 \delta^{m-1} + \delta^m \\ + \beta'(c_0+\delta)^{m-1} + b_0' \left\{ (m-1) c_0^{m-2}\delta + \binom{m-1}{2} c_0^{m-3}\delta^2 + \cdots + \delta^{m-1} \right\} \\ + \beta''(c_0+\delta)^{m-2} + b_0'' \left\{ (m-2) c_0^{m-3}\delta + \binom{m-2}{2} c_0^{m-4}\delta^2 + \cdots + \delta^{m-2} \right\} \\ \vdots \\ + \beta^{(m-1)}(c_0+\delta) + b_0^{(m-1)}\delta - \alpha. \end{aligned}$$

Der Koeffizient von c_0^{m-1} ist $m\delta + \beta'$ und bleibt wegen: $\beta'| < 1$, $|\delta| < 1$ absolut genommen $< m + 1$.

In dieser Form erscheint r_0 und somit auch R_1 als ganze rationale Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von c_0.

Ohne die Voraussetzung: $c_0 g^p \leqq x_1 < (c_0+1) g^p$ können wir scheinbar genau zum gleichen Resultat gelangen, denn nichts hindert uns, δ ganz analog durch die Gleichung: $(c_0 g^p + \delta g^p) = x_1$ zu definieren. Würde man aber von der obigen Bedingung absehen, so würde δ nicht mehr notwendig kleiner als 1 sein, und es könnte unter Umständen eintreten, daß $\delta \geqq c_0$ würde, was zur Folge hätte, daß auch

$$m c_0^{m-1} \delta \geqq m c_0^m$$

wird. Dann ist aber r_0 und somit auch R_1 nur scheinbar eine ganze rationale Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Behalten wir also die getroffenen Voraussetzungen bei, so ist:

$|A|$ ganze rationale Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von c_0,
S „ „ „ $(m-2)^{\text{ten}}$ „ „ „,
R_1 „ „ „ $(m-1)^{\text{ten}}$ „ „ „.

Der Zähler von:

$$a = \frac{2 \cdot (m-1)^{m-1} |A|^m}{(m+2) \cdot m^m \cdot S \cdot R_1^{m-1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{(m-1)^{m-1} |A|^m}{m^m \cdot S \cdot R_1^{m-1}}$$

ist demnach in c_0 vom Grade $m(m-1) = m^2 - m$, der Nenner dagegen vom Grade $[m-2+(m-1)(m-1)] = m^2 - m - 1$.

Der Grad des Zählers ist also um eine Einheit höher als der des Nenners, und somit kann man den Zähler gegenüber dem Nenner größer und größer machen, wenn man nur c_0 groß genug nimmt. Daraus folgt aber, daß man den ganzen Bruch a stets größer machen kann als eine beliebig vorgegebene Zahl $a_1 = \frac{g^{m-2}}{(g-1)^{m-1}}$, wenn man nur c_0 genügend groß wählt.

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, was eine Vergrößerung von c_0 zu bedeuten hat.

Die Bedingung $c_0 g^p \leqq x_1 < (c_0+1) g^p$ hieß im Dezimalsystem nichts anderes, als es muß mindestens die erste von Null verschiedene Dezimale von x_1 bekannt sein; wenn demnach von einer Vergrößerung von c_0 die Rede ist, so bedeutet dies nichts anderes, als es müssen mehrere Dezimalen der zu bestimmenden Wurzel als bekannt vorausgesetzt werden, wie viele, das hängt von der Natur der zu behandelnden Gleichung ab. Eine Vergrößerung von c_0 durch Anhängen von Nullen genügt nicht, da sich alsdann nur p ändern würde.

Sobald man aber c_0 ändert, nehmen auch die Größen

$$b_0', b_0'', b_0''', \ldots, b_0^{(m-1)} \text{ und } a$$

andere Werte an. Man kann demnach gegen die frühere Schlußweise einwenden, daß man es bei den Größen $|A|$, S, R_1 nicht schlechthin mit ganzen rationalen Funktionen von c_0 zu tun hat, da ja auch die Koeffizienten mit c_0 Änderungen unterworfen sind. Insbesondere folgt dann nicht ohne weiteres, daß durch Vergrößerung von c_0 auch a größer und größer wird. Es bedarf somit noch einer ergänzenden Untersuchung, um nachzuweisen, daß tatsächlich durch Vergrößerung von c_0 der Ausdruck a größer als $a_1 = \frac{g^{m-2}}{(g-1)^{m-1}}$ gemacht werden kann.

§ 7.

Fortgesetzte Betrachtung des Ausdruckes $a = \frac{2(m-1)^{m-1}|A|^m}{(m+2)\cdot m^m \cdot S \cdot R_1{}^{m-1}}$ bzw. $\frac{(m-1)^{m-1}|A|^m}{m^m \cdot S \cdot R_1{}^{m-1}}$.

Um die im letzten Paragraphen aufgeworfene Frage zu beantworten, betrachten wir diejenigen Größen, die sich mit c_0 ebenfalls ändern, und wollen sehen, wie sich diese Änderungen beim Übergang von einem c_0 zu einem andern vollziehen.

Zum besseren Verständnis möge das folgende Beispiel dienen:

Gegeben sei die Gleichung:

$$f(x) = x^6 + 321x^5 - 210{,}43x^2 + 0{,}047x - 78275{,}23 = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung liegt zwischen 3 und 3,1. Wir können demnach $c_0 = 3$, $p = 0$ und $g = 10$ wählen; dann ergibt sich für die Größen b', b'', b''', ..., $b^{(m-1)}$, a folgende Zerlegung:

b'	$= 321 \cdot 10^0$	d. h. b_0'	$= 321,$
b''	$= 0$	b_0''	$= 0,$
b'''	$= -210 \cdot 10^{3\cdot 0} - 4 \cdot 10^{3\cdot 0-1} - 3 \cdot 10^{3\cdot 0-2}$	b_0'''	$= -210,$
$b^{(IV)}$	$= 0$	$b_0^{(IV)}$	$= 0,$
$b^{(V)}$	$= 0 \cdot 10^{5\cdot 0} + 0 \cdot 10^{5\cdot 0-1} + 4 \cdot 10^{5\cdot 0-2} + 7 \cdot 10^{5\cdot 0-3}$	$b_0^{(V)}$	$= 0,$
a	$= 78275 \cdot 10^{6\cdot 0} + 2 \cdot 10^{6\cdot 0-1} + 3 \cdot 10^{6\cdot 0-2}$	a_0	$= 78275.$

Nimmt man dagegen $c_0 = 30$ und $p = -1$, so resultiert folgende Zerlegung:

b'	$= 3210 \cdot 10^{-1}$	b_0'	$= 3210,$
b''	$= 0$	b_0''	$= 0,$
b'''	$= -210430 \cdot 10^{3\cdot(-1)}$	b_0'''	$= -210430,$
$b^{(IV)}$	$= 0$	$b_0^{(IV)}$	$= 0,$
$b^{(V)}$	$= 4700 \cdot 10^{5\cdot(-1)}$	$b_0^{(V)}$	$= 4700,$
a	$= 78275230000 \cdot 10^{6\cdot(-1)}$	a_0	$= 78275230000.$

Geht man also von einem c_0, zu dem die Größen $b_0', b_0'', \ldots, b_0^{(m-1)}, a_0$ gehören, zu einem andern $\bar{c}_0$ über, wobei $\bar{c}_0$ eine Dezimale mehr enthält als c_0, so vergrößert sich b_0' um eine Dezimale, b_0'' um zwei Dezimalen, b_0''' um drei Dezimalen, ..., $b_0^{(m-1)}$ um $(m-1)$ Dezimalen und schließlich a_0 um m Dezimalen. In welchem Sinne „vergrößern" zu verstehen ist, geht aus dem angeführten Beispiele hervor.

Geht man allgemeiner von c_0 zu $\tilde{c}_0^{\,r}$ über, wobei $\tilde{c}_0^{\,r}$ r Dezimalen mehr enthält als c_0, so vergrößert sich b_0' um r Dezimalen, b_0'' um $2r$ Dezimalen usw., $b_0^{(m-1)}$ um $(m-1)r$ Dezimalen und a_0 um $m \cdot r$ Dezimalen.

Diese Überlegungen gelten offenbar ganz allgemein, so daß sich in jedem Falle beim Übergang von c_0 nach $\tilde{c}_0^{\,r}$ die Größe $b_0^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots, m-1)$ um $\nu \cdot r$ Dezimalen und a_0 um $m \cdot r$ Dezimalen vergrößert.

Außer $c_0, b_0', b_0'', b_0''', \ldots, b_0^{(m-1)}, a_0$ treten in den Ausdrücken $|A|$, S, R_1 keine Größen mehr auf, die beim Übergang von c_0 nach $\tilde{c}_0^{\,r}$ auf die früheren Ungleichungen einen Einfluß haben.

Wir haben demnach $|A|$, S, R_1 lediglich in bezug auf die Größen $c_0, b_0', b_0'', b_0''', \ldots, b_0^{(m-1)}, a_0$ bzw. deren Änderungen beim Übergang von c_0 nach $\tilde{c}_0^{\,r}$ zu untersuchen; insbesondere wollen wir im folgenden zusehen, ob der Wert a mit wachsendem c_0 in bestimmter Weise über alle Grenzen wächst.

Um diese Frage zu entscheiden, beachten wir getrennt die Änderungen, denen die Ausdrücke $|A|$, S, R_1 bei immer größer werdendem c_0 unterworfen sind.

Wenn wir von c_0 nach $\tilde{c}_0^{\,r}$ übergehen, so ändern sich die Größen $b_0', b_0'', b_0''', \ldots, b_0^{(m-1)}, a_0$ in der angegebenen Weise, und wir wollen diese neu entstandenen $b_0', b_0'', \ldots, b_0^{(m-1)}, a_0$ symbolisch durch

$$\tilde{b}_0'^{r}, \tilde{b}_0''^{r}, \tilde{b}_0'''^{r}, \ldots, \tilde{b}_0^{(m-1)r}, \tilde{a}_0^{\,r}$$

bezeichnen.

Zufolge der Definition von $\tilde{c}_0^{\,r}, \tilde{b}_0'^{r}, \ldots, \tilde{b}_0^{(m-1)r}, \tilde{a}_0^{\,r}$ gelten alsdann die Beziehungen:

$$\lim_{r=\infty} \tilde{c}_0^{\,r}\, g^{p-r} = x_1,$$

$$\lim_{r=\infty} \tilde{b}_0^{(\nu)r}\, g^{\nu(p-r)} = b^{(\nu)},$$

$$\lim_{r=\infty} \tilde{a}_0^{\,r}\, g^{m(p-r)} = a.$$

a) Verhalten von $|A|$ bei wachsendem c_0.

$|A|$ bzw. A war eingeführt durch die Gleichung:

$$A = m\, c_0^{m-1} + (m-1)\, b_0'\, c_0^{m-2} + \cdots + b_0^{(m-1)}.$$

Beim Übergang von c_0 nach ${c_0}^r$ geht A über in:

$$\tilde{A} = m\,(\tilde{c}_0{}^r)^{m-1} + (m-1)\,\tilde{b}_0{}'^r\,(\tilde{c}_0{}^r)^{m-2} + \cdots + \tilde{b}_0{}^{(m-1)_r}.$$

Multiplizieren wir links und rechts mit $g^{(m-1)(p-r)}$, so ist:

$$\begin{aligned} g^{(m-1)(p-r)}\tilde{A} &= m(\tilde{c}_0{}^r)^{m-1} g^{(m-1)(p-r)} + (m-1)(\tilde{c}_0{}^r)^{m-2}\,\tilde{b}_0{}'^r\, g^{(m-1)(p-r)} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \tilde{b}_0{}^{(m-1)_r}\, g^{(m-1)(p-r)} \\ &= m(\tilde{c}_0{}^r)^{m-1} g^{(m-1)(p-r)} + (m-1)(\tilde{c}_0{}^r)^{m-2}\, g^{(m-2)(p-r)}\,\tilde{b}_0{}'^r\, g^{p-r} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \tilde{b}_0{}^{(m-1)_r}\, g^{(m-1)(p-r)} \\ &= m(\tilde{c}_0{}^r\, g^{p-r})^{m-1} + (m-1)\,(\tilde{c}_0{}^r\, g^{p-r})^{m-2}\,\tilde{b}_0{}'^r\, g^{p-r} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \tilde{b}_0{}^{(m-1)_r}\, g^{(m-1)(p-r)}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise erscheint der Ausdruck geordnet nach fallenden Potenzen von $(\tilde{c}_0{}^r\, g^{p-r})$. Lassen wir jetzt r größer und größer werden, so ist:

$$\lim_{r=\infty} g^{(m-1)(p-r)}\,\tilde{A} = m\,{x_1}^{m-1} + (m-1)\,{x_1}^{m-2}\,b' + \cdots\, b^{(m-1)}.$$

$m\,{x_1}^{m-1} + (m-1)\,{x_1}^{m-2} b' + \cdots + b^{(m-1)}$ ist nichts anderes als $f'(x_1)$.

Demnach ist:

$$\lim_{r=\infty} g^{(m-1)(p-r)}\,\tilde{A} = f'(x_1).$$

Wenn wir also r_0 groß genug nehmen, so unterscheidet sich der Wert:

$$g^{(m-1)(p-r_0)}\,\tilde{A}$$

sehr wenig von $f'(x_1)$; man hat daher die Relation:

$$g^{(m-1)(p-r_0)}\,\tilde{A} = f'(x_1) + h,$$

wobei $|h|$ beliebig klein gemacht werden kann.

Es ist also:

$$\tilde{A} = \{f'(x_1) + h\}\, g^{(m-1)(r_0-p)}$$

und weiter:

$$|\tilde{A}| = |\{f'(x_1) + h\}\, g^{(m-1)(r_0-p)}|.$$

Hat $f'(x_1)$ einen von Null verschiedenen Wert, so kann man diesen Ausdruck offenbar beliebig groß machen, wenn man nur r_0 groß genug nimmt.

Wenn der Ausdruck:

$$a = \frac{2(m-1)^{m-1}\,|A|^m}{(m+2)\,m^m \cdot S \cdot {R_1}^{m-1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{(m-1)^{m-1}\,|A|}{m^m \cdot S \cdot {R_1}^{m-1}}$$

größer und größer werden soll, darf $|A|$ mit wachsendem c_0 keinen endlichen Grenzwert haben, insbesondere nicht Null werden, da ja S und R_1 nach Definition nicht verschwinden können. $|A|$ selbst könnte nur dann

endlich bleiben, wenn $f'(x_1) = 0$ würde, d. h. wenn $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln hätte.

Um daher ein Verschwinden von $f'(x)$ unmöglich zu machen, setzen wir voraus, daß die zu untersuchende Gleichung $f(x) = 0$ von den mehrfachen Wurzeln befreit sei, wie schon auf Seite 3 erwähnt war.

b) Verhalten von R_1 bei wachsendem c_0.

Ebenso, wie wir der Größe $A|$ sozusagen die Funktion $f'(x)$ bzw. $f'(x_1)$ zugeordnet haben, können wir jetzt auch für R_1 eine ganze rationale Funktion $f_1(x)$ bzw. $f_1(x_1)$ derart bestimmen, daß

$$g^{(m-1)(p-r)} R_1$$

mit wachsendem c_0 der Grenze $f_1(x_1)$ zustrebt, daß also für großes r_1 der Ausdruck

$$g^{(m-1)(p-r_1)} R_1$$

von $f_1(x_1)$ beliebig wenig verschieden ist, so daß:

$$g^{(m-1)(p-r_1)} R_1 = f_1(x_1) + h_1,$$

wobei $|h_1|$ eine sehr kleine Größe ist. Dann ist:

$$R_1 = \{f_1(x_1) + h_1\}\, g^{(m-1)(r_1-p)}.$$

Um diese Funktion $f_1(x)$ zu erhalten, ordnen wir die Größe R_1 unter Hervorhebung der Glieder, die frei von Größen $b_0^{(\nu)}$ sind, und unter besonderer Berücksichtigung derjenigen Glieder, die $b_0', b_0'', b_0''', \ldots, b_0^{(m-1)}$ enthalten (vgl. S. 38—41), in folgender Weise:

$$\begin{aligned} R_1 = {} & M_1 c_0^{m-1} + M_2 c_0^{m-2} + M_3 c_0^{m-3} + \cdots + M_{m-1} c_0 + M_m \\ & + b_0' M_2' c_0^{m-2} + b_0' M_3' c_0^{m-3} + \cdots + b_0' M_m' \\ & + b_0'' M_3'' c_0^{m-3} + b_0'' M_4'' c_0^{m-4} + \cdots + b_0'' M_m'' \\ & \vdots \\ & + b_0^{(m-1)} M_m^{(m-1)}. \end{aligned}$$

Die Größen $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_m, M_\nu^{(\lambda)}$ haben endliche Werte und hängen nur vom Grad der Gleichung $f(x) = 0$ und von g ab; sie können demnach beim Übergang von c_0 nach $\tilde{c}_0^{\,r}$ als unveränderlich betrachtet werden.

Gehen wir von c_0 nach $\tilde{c}_0^{\,r}$ über, so verwandelt sich R_1 in:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 = {} & M_1 (\tilde{c}_0^{\,r})^{m-1} + M_2 (\tilde{c}_0^{\,r})^{m-2} + M_3 (\tilde{c}_0^{\,r})^{m-3} + \cdots + M_{m-1} (\tilde{c}_0^{\,r}) + M_m \\ & + \tilde{b}_0'^{\,r} M_2' (\tilde{c}_0^{\,r})^{m-2} + \tilde{b}_0'^{\,r} M_3' (\tilde{c}_0^{\,r})^{m-3} + \cdots + \tilde{b}_0'^{\,r} M_m' \\ & + \tilde{b}_0''^{\,r} M_3'' (\tilde{c}_0^{\,r})^{m-3} + \tilde{b}_0''^{\,r} M_4' (\tilde{c}_0^{\,r})^{m-4} + \cdots + \tilde{b}_0''^{\,r} M_m'' \\ & \vdots \\ & + \tilde{b}_0^{(m-2)r} M_{m-1}^{(m-2)} (\tilde{c}_0^{\,r}) + \tilde{b}_0^{(m-2)r} M_m^{(m-2)} \\ & + \tilde{b}_0^{(m-1)r} M_m^{(m-1)}. \end{aligned}$$

Man definiere jetzt $f_1(x)$ durch die Gleichung:

$$f_1(x) = M_1 x^{m-1} + M_2' b' x^{m-2} + M_3'' b'' x^{m-3} + \cdots + M_{m-1}^{(m-2)} b^{(m-2)} x + b^{(m-1)} M_m^{(m-1)};$$

dann hat, wie wir zeigen wollen, dieses eben eingeführte $f_1(x)$ die verlangte Eigenschaft.

Bilden wir $g^{(m-1)(p-r)} \tilde{R}_1$, so ist:

$$\begin{aligned}
g^{(m-1)(p-r)} \tilde{R}_1 &= M_1 (\tilde{c}_0{}^r)^{m-1} g^{(m-1)(p-r)} + M_2 (\tilde{c}_0{}^r)^{m-2} g^{(m-1)(p-r)} + \cdots \\
&\quad \cdots + M_m g^{(m-1)(p-r)} \\
&+ M_2' \tilde{b}_0{}'^r g^{(m-1)(p-r)} (\tilde{c}_0{}^r)^{m-2} + M_3' \tilde{b}_0{}'^r (\tilde{c}_0{}^r)^{m-3} g^{(m-1)(p-r)} + \cdots \\
&\quad \cdots + \tilde{b}_0{}'^r M_m' g^{(m-1)(p-r)} \\
&+ M_3'' \tilde{b}_0{}''^r (\tilde{c}_0{}^r)^{m-3} g^{(m-1)(p-r)} + M_4'' \tilde{b}_0{}''^r (\tilde{c}_0{}^r)^{m-4} g^{(m-1)(p-r)} + \cdots \\
&\quad \cdots + \tilde{b}_0{}''^r M_m'' g^{(m-1)(p-r)} \\
&\vdots \\
&+ M_{m-1}^{(m-2)} \tilde{b}_0{}^{(m-2)r} (\tilde{c}_0{}^r) g^{(m-1)(p-r)} + M_m^{(m-2)} \tilde{b}_0{}^{(m-2)_r} g^{(m-1)(p-r)} \\
&+ M_m^{(m-1)} \tilde{b}_0{}^{(m-1)_r} g^{(m-1)(p-r)}.
\end{aligned}$$

Dies schreibt sich auch:

$$\begin{aligned}
g^{(m-1)(p-r)} \tilde{R}_1 &= M_1 (\tilde{c}_0{}^r g^{p-r})^{m-1} + M_2 (\tilde{c}_0{}^r g^{p-r})^{m-2} g^{p-r} + \cdots + M_m g^{(p-r)(m-1)} \\
&+ M_2' (\tilde{b}_0{}'^r g^{p-r}) (\tilde{c}_0{}^r g^{p-r})^{m-2} + M_3' (\tilde{b}_0{}'^r g^{p-r}) (\tilde{c}_0{}^r g^{p-r})^{m-3} g^{p-r} + \cdots \\
&\quad \cdots + M_m' (\tilde{b}_0{}'^r g^{p-r}) g^{(m-2)(p-r)} \\
&+ M_3'' (\tilde{b}_0{}''^r g^{2(p-r)}) (\tilde{c}_0{}^r g^{p-r})^{m-3} + \cdots + M_m'' (\tilde{b}_0{}''^r g^{2(p-r)}) g^{(m-3)(p-r)} \\
&\vdots \\
&+ M_{m-1}^{(m-2)} (\tilde{b}_0{}^{(m-2)_r} g^{(m-2)(p-r)}) (\tilde{c}_0{}^r g^{p-r}) \\
&+ M_m^{(m-2)} (\tilde{b}_0{}^{(m-2)_r} g^{(m-2)(p-r)}) g^{p-r} \\
&+ M_m^{(m-1)} (\tilde{b}_0{}^{(m-1)_r} g^{(m-1)(p-r)}).
\end{aligned}$$

Lassen wir jetzt r größer und größer werden, so gelten für die Ausdrücke $(\tilde{b}_0{}^{(\nu)_r} g^{\nu(p-r)})$ sowie für $(\tilde{c}_0{}^r g^{p-r})$ wieder die Relationen:

$$\lim_{r=\infty} (\tilde{c}_0{}^r g^{p-r}) = x_1,$$

$$\lim_{r=\infty} (\tilde{b}_0{}^{(\nu)_r} g^{\nu(p-r)}) = b^{(\nu)}.$$

Wir erhalten also:

$$\lim_{r=\infty} g^{(m-1)(p-r)} R_1$$
$$= M_1 x_1^{m-1} + M_2' b' x_1^{m-2} + \cdots + M_{m-1}^{(m-2)} b^{(m-2)} x_1 + M_m^{(m-1)} b^{(m-1)};$$

denn alle übrigen Glieder konvergieren nach 0, da sie sämtlich einen Faktor von der Form $g^{\nu(p-r)}$ enthalten. Demnach ist

$$\lim g^{(m-1)(p-r)} \tilde{R}_1 = f_1(x_1).$$

Wählen wir somit r_1 groß genug, so ist $g^{(m-1)(p-r_1)} \tilde{R}_1$ beliebig wenig von $f_1(x_1)$ verschieden, und es gilt die Relation:

$$g^{(m-1)(p-r_1)} \tilde{R}_1 = f_1(x_1) + h_1,$$

wobei $|h_1|$ beliebig klein wird, wenn man nur r_1 groß genug nimmt. Es ist dann:

$$\tilde{R}_1 = \{f_1(x_1) + h_1\} g^{(m-1)(r_1-p)}.$$

c) Verhalten von S bei wachsendem c_0.

S war definiert durch die Gleichung:

$$S = m \cdot M \cdot \bar{b} \cdot c_0^{m-2}.$$

Dabei sind m und M nur vom Grad der Gleichung $f(x) = 0$ und von g abhängig. $\bar{b}$ dagegen bedeutete die größte der Zahlen

$$g, |b_0'|, |b_0''|, \ldots, |b_0^{(m-1)}|.$$

Für die folgenden Betrachtungen müssen wir die beiden Fälle unterscheiden:

$$1) \quad c_0 > \bar{b},$$
$$2) \quad c_0 \leqq \bar{b}.$$

Ad 1). S war entstanden aus dem Ausdruck:

$$\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\cdots\lambda!\,(m-\sigma)!} c_0^{m-\sigma} + \frac{(m-1)!}{\alpha!\,\beta!\cdots\lambda!\,(m-\sigma-1)!} c_0^{m-\sigma-1} \left| b'_{\mu-\tau} \right| + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(m-t)!}{\alpha!\,\beta!\cdots\lambda!} \left| b^{(t)}_{\mu-\tau} \right|$$

(vgl. S. 17).

Die Größen $\left| b^{(\nu)}_{\mu-\tau} \right|$ bleiben nach der eben gemachten Annahme kleiner als c_0, denn es bestehen die Ungleichungen:

$$0 \leq \left| b^{(\nu)}_{\mu-\tau} \right| < g < c_0, \qquad \text{falls } \mu - \tau \geqq 1;$$

und nach Voraussetzung ist auch

$$0 < \left| b_0^{(\nu)} \right| < c_0;$$

um so mehr sind sie dann auch kleiner als die ν^{te} Potenz von c_0, da $c_0 > g$ sein soll.

Es ist also:

$$\left| b_{\mu-\tau}^{(\nu)} \right| < c_0^{\nu}.$$

Gehen wir jetzt von c_0 nach $\tilde{c}_0^{r}$ über, so mögen die Größen $\left| b_{\mu-\tau}^{(\nu)} \right|$ in $\left| \tilde{b}_{\mu-\tau}^{(\nu)r} \right|$ übergehen. Es fragt sich dann, ob weiter die Relation gilt:

$$\left| \tilde{b}_{\mu-\tau}^{(\nu)r} \right| < (\tilde{c}_0^{r})^{\nu}.$$

Wenn wir beachten, daß lediglich die Größen $\left| \tilde{b}_0^{(\nu)r} \right|$ gegenüber $\left| b_0^{(\nu)} \right|$ wesentliche Veränderungen erleiden, während für die Größen $\tilde{b}_{\mu-\tau}^{(\nu)r}$, $\mu - \tau \geqq 1$, nach wie vor die Beziehung stattfindet:

$$\left| \tilde{b}_{\mu-\tau}^{(\nu)r} \right| < g, \qquad (\mu-\tau \geqq 1)$$

so können wir uns darauf beschränken, die Ungleichung:

$$\left| \tilde{b}_0^{(\nu)r} \right| < (\tilde{c}_0^{r})^{\nu}$$

zu verifizieren. $\left| \tilde{b}_0^{(\nu)r} \right|$ entsteht aus $\left| b_0^{(\nu)} \right|$ lediglich durch Hinzufügen weiterer νr Dezimalen; demgegenüber hat auch $(\tilde{c}_0^{r})^{\nu}$ mindestens νr Dezimalen mehr als c_0^{ν}, die jedoch durch Potenzieren entstanden sind.

Nach Voraussetzung soll $c_0 > \bar{b}$ sein. Wenn wir sodann von c_0 nach $\tilde{c}_0^{r}$ übergehen, so muß $\tilde{c}_0^{r}$ zum mindesten gleich $c_0 g^{r}$ sein, und weiter $(\tilde{c}_0^{r})^{\nu}$ zum mindesten gleich $(c_0 g^{r})^{\nu} = c_0^{\nu} g^{r\nu}$. Nun ist aber $c_0^{\nu} g^{r\nu}$ offenbar größer als $\left| \tilde{b}_0^{(\nu)r} \right|$, um so mehr also:

$$(\tilde{c}_0^{r})^{\nu} \geqq c_0^{\nu} g^{r\nu} > \left| \tilde{b}_0^{(\nu)r} \right|.$$

Es bleibt also tatsächlich die Relation bestehen:

$$\left| \tilde{b}_0^{(\nu)r} \right| < (\tilde{c}_0^{r})^{\nu}$$

und damit auch

$$\left| \tilde{b}_{\mu-\tau}^{(\nu)r} \right| < (\tilde{c}_0^{r})^{\nu}.$$

An Stelle des Ausdruckes:

$$\frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma)!} c_0^{m-\sigma} + \frac{(m-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma-1)!} c_0^{m-\sigma-1} \left| b'_{\mu-\tau} \right| + \cdots + \frac{(m-t)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \left| b_{\mu-\tau}^{(t)} \right|$$

setzen wir jetzt den größeren

$$\frac{m!\, c_0^{m-\sigma}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma)!} + \frac{(m-1)!\, c_0^{m-\sigma}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma-1)!} + \cdots + \frac{(m-t)!\, c_0^{m-\sigma}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$$

$$= c_0^{m-\sigma} \left\{ \frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma)!} + \frac{(m-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma-1)!} + \cdots + \frac{(m-t)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \right\}.$$

Bezeichnen wir noch:

$$\mathsf{M} = \frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma)!} + \frac{(m-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma-1)!} + \cdots + \frac{(m-t)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}.$$

Wir definieren jetzt eine neue Größe S_1 durch die Gleichung:

$$S_1 = \mathsf{M} c_0^{m-2},$$

für diese gelten dann die Beziehungen:

$$S_1 > S,$$
$$\tilde{S}_1 > \tilde{S},$$

wenn $\tilde{S}_1$ bzw. $\tilde{S}$ diejenigen Ausdrücke bedeuten, die man aus S_1 bzw. S erhält, wenn man von c_0 zu $\check{c}_0^{\,r}$ übergeht.

Wir können nun im Falle 1. unsere frühere Größe S geradezu durch S_1 definieren. Dies ist offenbar erlaubt, da es lediglich auf eine Verschlechterung der Konvergenzbedingung hinausläuft.

Es sei also:

$$S = c_0^{m-2}\mathsf{M}.$$

Gehen wir von c_0 nach $\check{c}_0^{\,r}$ über, so entsteht aus S

$$\tilde{S} = (\check{c}_0^{\,r})^{m-2}\mathsf{M}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $g^{(m-2)(p-r)}$

$$g^{(m-2)(p-r)}\tilde{S} = (\check{c}_0^{\,r})^{m-2} g^{(m-2)(p-r)}\mathsf{M}$$

und lassen wir r mehr und mehr wachsen, so ist:

$$\lim_{r=\infty} g^{(m-2)(p-r)}\tilde{S} = \lim_{r=\infty} (\check{c}_0^{\,r} g^{p-r})^{m-2}\mathsf{M},$$
$$= x_1^{m-2}\mathsf{M}.$$

Ist r_2 sehr groß gewählt, so unterscheidet sich $g^{(m-2)(p-r_2)}\tilde{S}$ sehr wenig von $x_1^{m-2}\mathsf{M}$, so daß wir schreiben können:

$$g^{(m-2)(p-r_2)}\tilde{S} = x_1^{m-2}\mathsf{M} + h_2,$$

wobei $|h_2|$ beliebig klein gemacht werden kann. Demnach ist:

$$\tilde{S} = \{x_1^{m-2}\mathsf{M} + h_2\}\, g^{(m-2)(r_2-p)}.$$

Ad 2). Wir wenden uns nun zum zweiten Falle.

Um Gleichheit auszuschließen, definieren wir $\tilde{b}_0$ als ganze positive Zahl derart, daß

$$\tilde{b}_0 > \bar{b}$$

ist. Dann ist $\tilde{b}_0$ um so mehr größer als c_0. Gehen wir von c_0 nach $\check{c}_0^{\,r}$ über, so möge $\tilde{b}_0$ in eine Größe $\tilde{b}_0^{\,r}$ übergehen und zwar so, daß

$$\tilde{b}_0^{\,r} = \tilde{b}_0 g^r$$

ist. Für die so eingeführten Größen $\tilde{b}_0$ und $\tilde{b}_0^{\,r}$ gelten dann offenbar die Beziehungen:

(1) $$\tilde{b}_0 > \bar{b},$$

(2) $$\tilde{b}_0^{\,r}(\check{c}_0^{\,r})^{\nu} > \tilde{b}_0^{(\nu)r},$$

(3) $$\tilde{b}_0^{\,r} > \check{c}_0^{\,r}.$$

In der zweiten Ungleichung mußte der Faktor $(\tilde{c}_0{}^r)^\nu$ bei $\tilde{b}_0{}^r$ deshalb zugefügt werden, weil $\tilde{b}_0{}^{(\nu)_r}$ νr Dezimalen mehr hat als $b_0{}^r$, während $\tilde{b}_0{}^r$ gegenüber $\tilde{b}_0$ nur um r Dezimalen gewachsen ist.

In dem Ausdruck:

$$\frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma)!}c_0{}^{m-\sigma}+\frac{(m-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma-1)!}c_0{}^{m-\sigma-1}|b'_{\mu-\tau}|+\cdots$$
$$+\frac{(m-t)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}|b^{(t)}_{\mu-\tau}$$

ersetzen wir jetzt die Größen $b^{(\nu)}_{\mu-\tau}$ durch die Zahl $\tilde{b}_0$, desgleichen im ersten Summanden einmal den Faktor c_0. Dadurch erhalten wir die größere Summe:

$$\frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma)!}c_0{}^{m-\sigma-1}\tilde{b}_0+\frac{(m-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma-1)!}c_0{}^{m-\sigma-1}\tilde{b}_0+\cdots$$
$$+\frac{(m-t)!\,\tilde{b}_0}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}.$$

Weiter vergrößern wir diese Summe, die lauter positive Glieder enthält, wenn wir überall c_0 (>1) auf die Potenz $c_0{}^{m-\sigma-1}$ bringen:

$$\tilde{b}_0c_0{}^{m-\sigma-1}\left\{\frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma)!}+\frac{(m-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(m-\sigma-1)!}+\cdots+\frac{(m-t)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}\right\}$$
$$=\tilde{b}_0c_0{}^{m-\sigma-1}\mathsf{M}. \qquad \sigma\geqq 2$$

Definieren wir jetzt S_2 durch die Gleichung:

$$S_2=\tilde{b}_0c_0{}^{m-2-1}\mathsf{M}=\tilde{b}_0c_0{}^{m-3}\mathsf{M},$$

so gilt für S_2 die Relation:

$$S_2>S,$$
$$\tilde{S}_2>\tilde{S},$$

wobei unter $\tilde{S}_2$ und $\tilde{S}$ diejenigen Ausdrücke zu verstehen sind, die aus S_2 und S entstehen, wenn wir von c_0 zu $\tilde{c}_0{}^r$ übergehen.

Wie im ersten Falle können wir jetzt auch hier die Größe S geradezu durch S_2 definiert denken, d. h. wir setzen einfach:

$$S=S_2=\tilde{b}_0c_0{}^{m-3}\mathsf{M}.$$

Gehen wir von c_0 zu $\tilde{c}_0{}^r$ über, so geht S über in $\tilde{S}$, wobei

$$\tilde{S}=\tilde{b}_0g^r(\tilde{c}_0{}^r)^{m-3}\mathsf{M}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $g^{(m-2)(p-r)}$ und lassen wir r unbegrenzt wachsen, so ist:

$$\lim_{r=\infty}g^{(m-2)(p-r)}\tilde{S}=\lim_{r=\infty}\tilde{b}_0g^p(c_0{}^rg^{p-r})^{m-3}\mathsf{M}$$
$$=\tilde{b}_0g^px_1{}^{m-3}\mathsf{M}.$$

Wird demnach r_3 groß genug gewählt, so wird:

$$g^{(m-2)(\varrho-r_3)}\tilde{S} = \tilde{b}_0 g^{\varrho} x_1^{m-3}\mathsf{M} + h_3,$$

wobei $|h_3|$ beliebig klein gemacht werden kann, und man erhält schließlich:

$$\tilde{S} = \{\tilde{b}_0 g^{p} x_1^{m-3}\mathsf{M} + h_3\} g^{(m-2)(r_3-p)}.$$

$f_2(x)$ sei so definiert, daß $f_2(x) = x^{m-2}\mathsf{M}$ ist, wenn wir den ersten Fall haben, dagegen $f_2(x) = \tilde{b}_0 g^{p} x^{m-3}\mathsf{M}$, wenn der zweite Fall vorliegt. ϱ sei die größte der Zahlen r_0, r_1, r_2, r_3, dann gelten die Beziehungen:

$$|\tilde{A}| = |f'(x_1) + h'|\, g^{(m-1)(\varrho-p)},$$
$$\tilde{R}_1 = (f_1(x_1) + h'')\, g^{(m-1)(\varrho-p)},$$
$$\tilde{S} = (f_2(x_1) + h''')\, g^{(m-2)(\varrho-p)}.$$

Die Größen h', h'', h''' können absolut genommen beliebig klein gemacht werden, wenn man nur ϱ groß genug wählt.

Kehren wir nun zurück zu dem Bruche:

$$(13) \qquad a = \frac{2(m-1)^{m-1}|A|^m}{(m+2)m^m S R_1^{m-1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{(m-1)^{m-1}|A|^m}{m^m S R_1^{m-1}}$$

Um die beiden Fälle zusammenzufassen, schreiben wir:

$$a = \mathfrak{A}\frac{|A|^m}{S R_1^{m-1}},$$

wobei $\mathfrak{A}$ den durch (13) bestimmten endlichen Wert hat.

Wählen wir jetzt c_0 geeignet, d. h. nehmen wir ϱ groß genug, so können wir an Stelle der Größen $|A|$, S, R_1 die eben gefundenen Werte $|\tilde{A}|$, $\tilde{S}$, $\tilde{R}_1$ einsetzen und erhalten:

$$a = \frac{\mathfrak{A}\{f'(x_1) + h'|\}^m g^{(m-1)(\varrho-p)m}}{(f_2(x_1)+h''')g^{(m-2)(\varrho-p)}(f_1(x_1)+h'')^{m-1} g^{(m-1)(\varrho-p)(m-1)}}$$
$$= \frac{\mathfrak{A}\{|f'(x_1) + h'|\}^m}{(f_2(x_1)+h''')(f_1(x_1)+h'')^{m-1}} g^{\varrho-p}$$
$$= \left[\frac{\mathfrak{A}\{|f'(x_1) + h'|\}^m}{g^{p}(f_2(x_1)+h''')(f_1(x_1)+h'')^{m-1}}\right] g^{\varrho}.$$

Aus dieser Form erhellt, daß a über alle Grenzen wächst, wenn man nur ϱ, d. h. c_0 groß genug wählt; denn der Faktor von g^{ϱ} hat einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert.

Damit haben wir jetzt vollkommen bewiesen, daß bei geeigneter Voraussetzung über c_0, d. i., wenn man c_0 von Anfang nicht zu klein wählt, die Reihe: $c_0 g^{p} + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots$ stets konvergiert.

Wie groß c_0 mindestens gewählt werden muß, hängt von der Natur der zu untersuchenden Gleichung $f(x) = 0$ ab.

§ 8.

Konvergenzbedingung in expliziter Form für die Gleichungen $x^2 = a$, $x^m = a$, $x^m + bx = a$, $x^m - bx = a$.

Sehen wir einmal zu, welche Konvergenzbedingung wir nach dieser Methode für den einfachsten Fall, den einer Quadratwurzelausziehung, erhalten, um sie dann mit dem bei Lüroth, S. 147 gefundenen Resultat zu vergleichen.

Für die Größen $|A|$, S, R_1 erhalten wir in diesem speziellen Falle die Werte:

$$|A| = 2c_0, \quad S = 2, \quad R_1 = 2c_0(g+1) + g - 2.$$

Zur Konvergenz der Reihe $c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots$ ist notwendig, daß

$$\frac{(m-1)^{m-1}|A|^m}{m^m S R_1{}^{m-1}} > \frac{g^{m-2}}{(g-1)^{m-1}},$$

d. h. also hier, falls wir $g = 10$ wählen,

$$\frac{(2c_0)^2}{2^2 2\{2c_0 11 + 8\}} > \frac{1}{9}.$$

Daraus folgt:

$$9c_0{}^2 - 4c_0 11 - 16 > 0.$$

Dies verlangt:

$$c_0 > 5{,}2,$$

d. i.

$$c_0 \geqq 6.$$

Wenn wir nicht dasselbe Resultat: $c_0 \geqq 3$ wie a. a. O. erhalten, so liegt dies daran, daß, wenn man die für eine allgemeine Gleichung eingeführten Größen $|A|$, S, R_1 der vorgelegten Gleichung anpaßt, diejenige Genauigkeit nicht erreicht werden kann, die man erhält, wenn man speziell für die Gleichung $x^2 = a$ eine Konvergenzbedingung aufstellt.

Wie eine kurze Überlegung zeigt, kann man in dem speziellen Falle $x^2 = a$ an Stelle von $S = 2$ auch den Wert $S = 1$ setzen, und man erhält dann, in Übereinstimmung mit dem angegebenen Resultat:

$$c_0 \geqq 3.$$

Man könnte daran denken, ähnliche Konvergenzbedingungen, wie wir sie für den Fall einer Quadratwurzelausziehung erhalten haben, auch für allgemeinere Gleichungen, so z. B. für die trinomischen Gleichungen herzuleiten. Man sieht jedoch leicht ein, daß man nicht zu solch direkten Resultaten gelangen kann, wie dies bei der Gleichung $x^2 = a$ möglich war, da jetzt außer c_0 noch andere Parameter in Frage kommen, wie z. B. die Größen $b_0{}^{(\nu)}$. Wollten wir demnach für solche Gleichungen analoge

Bedingungen aufstellen, so wären wir gezwungen, jeden einzelnen Fall getrennt zu behandeln, d. h. wir müßten — um speziell die trinomischen Gleichungen im Auge zu behalten — unterscheiden, ob in der Gleichung $x^{m+n} + bx^n = a$ die Größe b größer oder kleiner als Null ist, ob die Exponenten $m + n$ und n beide gerade oder ungerade sind, oder ob der eine gerade, der andere dagegen ungerade ist.

Es sei deshalb auf diese Fragen nicht näher eingegangen. Nur die ganz speziellen Gleichungen:

$$x^m = a,$$
$$x^m + bx = a,$$
$$x^m - bx = a,$$

wobei $b > 0$ und $a > 0$ ist, sollen von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet werden, da die Resultate in vielen Fällen noch einen praktischen Wert haben.

$x^m = a.$

In diesem Falle entsprechen den Größen $|A|$, S, R_1 die Werte:

$$|A| = mc_0^{m-1},$$
$$S = m(m-1)c_0^{m-2},$$
$$R_1 = g\left\{mc_0^{m-1} + \binom{m}{2}c_0^{m-2} + \cdots + mc_0\right\} + g - 1.$$

Nehmen wir an, c_0 sei schon von Anfang größer als $(m-2)$, dann gilt die Beziehung:

$$\binom{m}{2}c_0^{m-2} + \binom{m}{3}c_0^{m-3} + \cdots + mc_0 \gtrless \binom{m}{2}(m-2)c_0^{m-2} - 1.$$

Zum Beweise schreiben wir $\binom{m}{2}c_0^{m-2} + \binom{m}{3}c_0^{m-3} + \cdots + mc_0$ in der Form:

$$\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}c_0^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}c_0^{m-3} + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots 2}{1\cdot 2\ldots(m-1)}c_0$$
$$= \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\left\{c_0^{m-2} + \frac{(m-2)}{3}c_0^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{3\cdot 4}c_0^{m-4} + \cdots + \frac{(m-2)(m-3)\ldots 2}{3\cdot 4\ldots(m-1)}c_0\right\}.$$

Nach Voraussetzung soll $c_0 > m-2$ sein; dann gilt offenbar die Beziehung:

$$\frac{m-2}{3} < c_0, \quad \frac{(m-2)(m-3)}{3\cdot 4} < c_0^2, \ldots, \quad \frac{(m-2)(m-3)\ldots 2}{1\cdot 2\ldots(m-1)} < c_0^{m-3}.$$

Demnach ist:

$$\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\left\{ {c_0}^{m-2} + \frac{(m-2)}{3}{c_0}^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{3\cdot 4}{c_0}^{m-4} + \cdots + \frac{(m-2)(m-3)\ldots 2}{3\cdot 4\ldots(m-1)}c_0\right\}$$

$$< \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\{ {c_0}^{m-2} + {c_0}^{m-3}c_0 + {c_0}^{m-4}{c_0}^2 + \cdots + c_0{c_0}^{m-3}\}$$

$$< \binom{m}{2}(m-2){c_0}^{m-2}.$$

Um ein bequemeres Resultat zu erhalten, setzen wir weiter voraus, daß c_0 sogar größer oder gleich $\binom{m}{2}(m-2)$ gewählt sein soll; dann ist auch

$${c_0}^{m-1} \geqq \binom{m}{2}(m-2){c_0}^{m-2}.$$

Es wird sich zeigen, daß die eben getroffenen Voraussetzungen keine Einschränkungen sind, daß vielmehr zur Konvergenz von $c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots$ die Bedingung

$$c_0 > \binom{m}{2}(m-2)$$

notwendig, aber noch nicht hinreichend ist.

Wir können demnach für $|A|$, S, R_1 auch die nachstehenden Werte setzen:

$$|A| = m{c_0}^{m-1},$$
$$S = m(m-1){c_0}^{m-2},$$
$$R_1 = g\{(m+1){c_0}^{m-1} - 1\} + g - 1.$$

Bei R_1 lassen wir noch die Größe (-1) weg, dadurch tritt nur eine Vergrößerung ein.

Der Ausdruck $\frac{(m-1)^{m-1}|A|^m}{m^m S {R_1}^{m-1}}$ nimmt jetzt die Form an:

$$\frac{(m-1)^{m-1}m^m{c_0}^{(m-1)m}}{m^m m(m-1){c_0}^{m-2}{c_0}^{(m-1)(m-1)}\{g(m+1)\}^{m-1}} = \frac{(m-1)^{m-2}c_0}{m(m+1)^{m-1}g^{m-1}}.$$

Zur Konvergenz der Reihe ist somit nötig, daß

$$c_0 > \frac{g^{m-2}g^{m-1}m(m+1)^{m-1}}{(g-1)^{m-1}(m-1)^{m-2}},$$

bzw. wenn $g = 10$ gewählt wird:

$$c_0 > \frac{10^{2m-3}m(m+1)^{m-1}}{9^{m-1}(m-1)^{m-2}}.$$

$$x^m + bx = a. \quad b>0,\ a>0.$$

Um ein einfaches Resultat zu erhalten, setzen wir voraus, daß die Größe r_0, die durch die Gleichung:

$$r_0 = a_0 - c_0^m - b_0' c_0^{m-1} - b_0'' c_0^{m-2} - \cdots - b_0^{(m-1)} c_0$$

eingeführt war, der Bedingung genügt:

$$|r_0| \leq m c_0^{m-1} + b_0 - 1.$$

b_0 entspricht der früher definierten Größe $b_0^{(m-1)}$; da keine weiteren Größen $b^{(\nu)}$ auftreten, wurde der obere Index weggelassen.

Sollte die angeführte Ungleichung nicht erfüllt sein, so kann man dadurch gewisse Vereinfachungen erzielen, daß man wiederum von Anfang an über c_0 geeignet verfügt, doch sei hierauf nicht näher eingegangen.

Hält man die Annahme $|r_0| \leq m c_0^{m-1} + b_0 - 1$ aufrecht, so ergeben sich für die Größen $|A|$, S, R_1 als größte in Betracht kommende Werte:

$$|A| = m c_0^{m-1} + b_0,$$
$$S = m(m-1) c_0^{m-2},$$
$$R_1 = g(m c_0^{m-1} + b_0).$$

Dann wird

$$a = \frac{2(m-1)^{m-1}|A|^m}{(m+2) m^m S R_1^{m-1}} = \frac{2(m-1)^{m-1}(m c_0^{m-1} + b_0)^m}{(m+2) m^m m(m-1) c_0^{m-2} (m c_0^{m-1} + b_0)^{m-1} g^{m-1}}.$$

Wie aus der Definition der Größen $|A|$, R_1, speziell S folgt (siehe S. 16, 17), kann man bei trinomischen Gleichungen den Faktor $(m+2)$ im Nenner von a auch durch 4 ersetzen. Dann ist:

$$a = \frac{(m-1)^{m-1}(m c_0^{m-1} + b_0)^m}{2 m^m m(m-1) g^{m-1} c_0^{m-2} (m c_0^{m-1} + b_0)^{m-1}}.$$

Zur Konvergenz von $c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots$ ist also erforderlich, daß

$$\frac{(m-1)^{m-1}(m c_0^{m-1} + b_0)}{2 m^m m(m-1) g^{m-1} c_0^{m-2}} > \frac{g^{m-2}}{(g-1)^{m-1}}.$$

Dies verlangt:

$$\frac{m c_0^{m-1} + b_0}{m c_0^{m-2}} > \frac{2 g^{m-2} g^{m-1} m^m}{(m-1)^{m-2} (g-1)^{m-1}},$$

oder falls $g = 10$ gewählt wird:

$$c_0 + \frac{b_0}{m c_0^{m-2}} > \frac{2 \cdot 10^{2m-3} m^m}{(m-1)^{m-2} 9^{m-1}}.$$

$$x^m - bx = a. \quad b>0,\ a>0.$$

Wir wollen uns wieder auf den Fall beschränken, daß

$$|r_0| \leqq |m c_0^{m-1} - b_0 - 1|$$

ist. Dann erhält man für die Größen $|A|$, S, R_1 als größte in Betracht kommende Werte:

$$\begin{aligned} |A| &= |mc_0^{m-1} - b_0|, \\ S &= m(m-1)c_0^{m-2}, \\ R_1 &= g|mc_0^{m-1} - b_0| + |mc_0^{m-1} - b_0|, \\ &= (g+1)(|mc_0^{m-1} - b_0|). \end{aligned}$$

Der Ausdruck a nimmt sodann die Form an:

$$a = \frac{(m-1)^{m-1}|A|^m}{2m^m S R_1^{m-1}} = \frac{(m-1)^{m-1}|mc_0^{m-1} - b_0|^m}{2m^m m(m-1)c_0^{m-2}(g+1)^{m-1}|mc_0^{m-1} - b_0|^{m-1}}.$$

Es muß also

$$\frac{(m-1)^{m-2}|mc_0^{m-1} - b_0|}{2m^m m(g+1)^{m-1}c_0^{m-2}} > \frac{g^{m-2}}{(g-1)^{m-1}}$$

sein. Dies verlangt:

$$\frac{|mc_0^{m-1} - b_0|}{mc_0^{m-2}} > \frac{g^{m-2}(g+1)^{m-1}m^m 2}{(m-1)^{m-2}(g-1)^{m-1}}.$$

Oder wenn wir $g = 10$ wählen:

$$\left| c_0 - \frac{b_0}{mc_0^{m-2}} \right| > \frac{10^{m-2}11^{m-1}m^m 2}{9^{m-1}(m-1)^{m-2}}.$$

Wollte man beispielsweise die Gleichung $x^3 - 2x = 5$ behandeln, so müßte, um obiger Bedingung zu genügen,

$$\left| c_0 - \frac{b_0}{mc_0^{m-2}} \right| > \frac{10 \cdot 121 \cdot 27 \cdot 2}{81 \cdot 2} = 403{,}3$$

sein. Diese Ungleichung ist erfüllt, sobald man $c_0 = 2094$ wählt. Dann ist: $p = -3$ und $b_0 = -2000000$;

$$\left| c_0 - \frac{b_0}{mc_0^{m-2}} \right| = |2094 - 318| = 1776 > 403{,}3\ldots$$

§ 9.

Anwendung.

Gegeben sei die Gleichung:

$$x^3 + 345x = 12.$$

Die reelle Wurzel dieser Gleichung liegt zwischen 0,034 und 0,035. Man wähle deshalb:

$$c_0 = 34;$$

dann ist

$$p = -3, \quad b_0' = 0, \quad b_0'' = b_0 = 345000000, \quad a_0 = 12000000000,$$
$$r_0 = a_0 - c_0^3 - b_0'' c_0 = 269960696,$$
$$|A| = A = 3c_0^2 + b_0 = 345000000 + 3468,$$
$$A = 345003468.$$

Die Konvergenz der zu bestimmenden Reihe:

$$c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots$$

ist gesichert, wenn nach dem Kriterium für die Gleichung $x^m + bx = a$:

$$c_0 + \frac{b_0}{3 \cdot c_0} > \frac{2 \cdot 10^{2m-3} 3^3}{9^2 \cdot 2} = 333{,}3\ldots$$

Diese Relation ist erfüllt, denn es ist:

$$34 + \frac{345000000}{3 \cdot 34} = 3382386{,}94\ldots > 333{,}3\ldots$$

Es ist also erlaubt, in der angegebenen Weise die Berechnung der Größen $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ vorzunehmen, um schließlich eine konvergente Reihe zu erhalten.

Wir hatten:

$$r_0 = 269960696,$$

sowie

$$A = 345003468.$$

Es ist dann:

$$g r_0 + a_1 = 2699606960$$
$$\text{Corr.} \quad 0$$
$$r_0' \quad 2699606960.$$

Die Rechnung nimmt jetzt den folgenden Verlauf:

$r_0' =$	2699606960	$: A = 345003468$		$c_0 = 34$
	2415024276			$c_1 = 7$
r_1	2845826840			$c_2 = 8$
Corr.	4998	$= 3 c_0 c_1^2$		$c_3 = 2$
r_1'	2845821842			$c_4 = 4$
	2760027744			$c_5 = 8$
r_2	857940980			$c_6 = 6$
Corr.	11767	$= 6 c_0 c_1 c_2 + c_1^3$		$c_7 = 7$
r_2'	857929213			$c_8 = 2$
	690006936			$c_9 = 2$
r_3	1679222770			$c_{10} = 9$
Corr.	10560	$= 6 c_0 c_1 c_3 + 3 c_0 c_2 c_2 + 3 c_1^2 c_2$		$c_{11} = 0$
r_3'	1679212210			$c_{12} = 9$
	1380013872			$c_{13} = 6$
r_4	2991983380			$c_{14} = 2$
				$\vdots$

	Corr.	10614	$= 6c_0c_1c_4 + 6c_0c_2c_3 + 3c_1{}^2c_3 + 3c_1c_2{}^2$
$r_4' =$		2991972766	
		2760027744	
r_5		2319450220	
	Corr.	20132	$= 6c_0c_1c_5 + 6c_0c_2c_4 + 3c_0c_3{}^2 + 3c_1{}^2c_4 + 6c_1c_2c_3 + c_2{}^3$
r_5'		2319430088	
		2070020808	
r_6		2494092800	
	Corr.	26244	$= 6c_0c_1c_6 + 6c_0c_2c_5 + 6c_0c_3c_4 + 3c_1c_1c_5 + 6c_1c_2c_4 + 3c_1c_3c$
r_6'		2494066556	$+ 3c_2c_2c_3$
		2415024276	
r_7		790422800	
	Corr.	29454	$= 6c_0c_1c_7 + 6c_0c_2c_6 + 6c_0c_3c_5 + 3c_0c_4c_4 + 3c_1c_1c_6 + 6c_1c_2c$
r_7'		790393346	$+ 6c_1c_3c_4 + 3c_2c_2c_4 + 3c_2c_3c_3$
		690006936	
r_8		1003864100	
	Corr.	29237	$= 6c_0c_1c_8 + 6c_0c_2c_7 + 6c_0c_3c_6 + 6c_0c_4c_5 + 3c_1c_1c_7 + 6c_1c_2c$
r_8'		1003834863	$+ 6c_1c_3c_5 + 3c_1c_4c_4 + 3c_2c_2c_5 + 6c_2c_3c_4 + c_3{}^3$
		690006936	
r_9		3138279270	
	Corr.	27246	$= 6c_0c_1c_9 + 6c_0c_2c_8 + 6c_0c_3c_7 + 6c_0c_4c_6 + 3c_0c_5c_5 + 3c_1c_1c$
r_9'		3138252024	$+ 6c_1c_2c_7 + 6c_1c_3c_6 + 6c_1c_4c_5 + 3c_2c_2c_6 + 6c_2c_3c$
		3105031212	$+ 3c_2c_4c_4 + 3c_3c_3c_4$
r_{10}		332208120	
	Corr.	39990	$= 6c_0c_1c_{10} + 6c_0c_2c_9 + 6c_0c_3c_8 + 6c_0c_4c_7 + 6c_0c_5c_6 + 3c_1c_1c$
r_{10}'		332168130	$+ 6c_1c_2c_8 + 6c_1c_3c_7 + 6c_1c_4c_6 + 3c_1c_5c_5 + 3c_2c_2c$
		0	$+ 6c_2c_3c_6 + 6c_2c_4c_5 + 3c_3c_3c_5 + 3c_3c_4c_4$
r_{11}		3321681300	
	Corr.	41851	$= 6c_0c_1c_{11} + 6c_0c_2c_{10} + 6c_0c_3c_9 + 6c_0c_4c_8 + 6c_0c_5c_7 + 3c_0c_6c$
r_{11}'		3321639449	$+ 3c_1c_1c_{10} + 6c_1c_2c_9 + 6c_1c_3c_8 + 6c_1c_4c_7 + 6c_1c_5c$
		3105031212	$+ 3c_2c_2c_8 + 6c_2c_3c_7 + 6c_2c_4c_6 + 3c_2c_5c_5 + 3c_3c_3c$
r_{12}		2166082370	$+ 6c_3c_4c_5 + c_4{}^3$
	Corr.	41988	$= 6c_0c_1c_{12} + 6c_0c_2c_{11} + 6c_0c_3c_{10} + 6c_0c_4c_9 + 6c_0c_5c_8 + 6c_0c_6c_7$
r_{12}'		2166040382	$+ 3c_1c_1c_{11} + 6c_1c_2c_{10} + 6c_1c_3c_9 + 6c_1c_4c_8 + 6c_1c_5c_7$
		2070020808	$+ 3c_1c_6c_6 + 3c_2c_2c_9 + 6c_2c_3c_8 + 6c_2c_4c_7 + 6c_2c_5c_6$
r_{13}		960195740	$+ 3c_3c_3c_7 + 6c_3c_4c_6 + 3c_3c_5c_5 + 3c_4c_4c_5$
	Corr.	53013	$= 6c_0c_1c_{13} + 6c_0c_2c_{12} + 6c_0c_3c_{11} + 6c_0c_4c_{10} + 6c_0c_5c_9 + 6c_0c_6c_8$
r_{13}'		960142727	$+ 3c_0c_7c_7 + 3c_1c_1c_{12} + 6c_1c_2c_{11} + 6c_1c_3c_{10} + 6c_1c_4c_9$
		690006936	$+ 6c_1c_5c_8 + 6c_1c_6c_7 + 3c_2c_2c_{10} + 6c_2c_3c_9 + 6c_2c_4c_8$
r_{14}		2701357910	$+ 6c_2c_5c_7 + 3c_2c_6c_6 + 3c_3c_3c_8 + 6c_3c_4c_7 + 6c_3c_5c_6$
		⋮	$+ 3c_4c_4c_6 + 3c_4c_5c_5.$

Man findet demnach:

$$x = c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + c_3 g^{p-3} + \cdots$$
$$= 34 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-7} + 8 \cdot 10^{-8} + 6 \cdot 10^{-9} + \cdots$$
$$= 0{,}034782486722909 62 \cdots$$

2. Beispiel:

$$x^6 + 321x^5 - 210,43x^2 + 0,047x = 78275,23.$$

Ein Überschlag lehrt, daß eine Wurzel der Gleichung zwischen 3 und 4 gelegen ist.

Wir können dann $c_0 = 3$ und $p = 0$ wählen.

Infolgedessen ist:

$$b_0' = 321,\ b_0'' = 0,\ b_0''' = 0,\ b_0^{(IV)} = -210,\ b_0^{(V)} = 0,\ a_0 = 78275.$$

Daraus berechnet sich

$$r_0 = 1433,\ A = 130203$$

$$gr_0 + a_1 = 14332$$

$$\text{Corr. } \mp 36 = c_0^5 \cdot 0 + c_0^4 \cdot 0 + c_0^3 \cdot 0 - c_0^2 \cdot 4 + c_0 \cdot 0$$

$$r_0' = 14368.$$

Bezeichnen wir der Deutlichkeit wegen $\left(b_\lambda^{(\nu)} \sum_{\mu-\lambda}^{m-\nu}\right)_{\nu=0}^{\nu=m-1}$ einfach durch $b_\lambda^{(\nu)} \sum_{\mu-\lambda}^{m-\nu}$, so nimmt die Rechnung folgenden Verlauf:

$r_0' =$	14368	: 130203;	$c_0 = 3$
	0		$c_1 = 0$
r_1	143683		$c_2 = 1$
Corr.	∓ 15	$= b_2^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_1^{m-\nu} + b_0^{(\nu)} \sum_2^{\prime\, m-\nu}$	$c_3 = 1$
r_1'	143698		$c_4 = 0$
	130203		$c_5 = -5$
r_2	134950		$c_6 = 4$
Corr.	∓ 3	$= b_3^{(\nu)} \sum_0^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_1^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_2^{m-\nu} + b_0^{(\nu)} \sum_3^{\prime\, m-\nu}$	$\vdots$
r_2'	134953		
	130203		
r_3	47500		
Corr.	± 87637	$= b_3^{(\nu)} \sum_1^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_2^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_3^{m-\nu} + b_0^{(\nu)} \sum_4^{\prime\, m-\nu}$	
r_3'	-40137		
	0		
r_4	-401370		
Corr.	± 175549	$= b_3^{(\nu)} \sum_2^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_3^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_4^{m-\nu} + b_0^{(\nu)} \sum_5^{\prime\, m-\nu}$	
r_4'	-576919		
	∓ 651015		
r_5	740960		
Corr.	± 117011	$= b_3^{(\nu)} \sum_3^{m-\nu} + b_2^{(\nu)} \sum_4^{m-\nu} + b_1^{(\nu)} \sum_5^{m-\nu} + b_0^{(\nu)} \sum_6^{\prime\, m-\nu}$	
r_5'	623949		
	± 520812		
r_6	103137		
	$\vdots$		

Man findet auf diese Weise

$$x = 3 + 1 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-5} + 4 \cdot 10^{-6}$$
$$= 3{,}010954 \cdots$$

§ 10.
Der Rest.

Zur Beurteilung des gefundenen Wertes kann man den Rest betrachten, der entsteht, wenn man den Wert:

$$c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu}$$

in die Gleichung

$$f(x) = x^m + b' x^{m-1} + b'' x^{m-2} + \cdots + b^{(m-1)} x - a$$

einsetzt. Bezeichnen wir mit P_μ den Ausdruck:

$$P_\mu = a - (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})^m$$
$$- b'(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})^{m-1} - \cdots$$
$$- (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu}) b^{(m-1)}.$$

Da

$$a = (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots)^m + (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots)^{m-1} b' + \cdots$$
$$+ (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots) b^{(m-1)}$$

ist, können wir P_μ in die Form bringen:

$$P_\mu = g^{mp-\mu-1}\Big\{ r_\mu g + a_{\mu+1} - \sum_{\mu+1}^{m}{}' - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \Big\{ \sum_{\mu+1}^{m-\nu}{}' b_0^{(\nu)} + \sum_{\mu}^{m-\nu} b_1^{(\nu)} + \cdots + \sum_{0}^{m-\nu} b_{\mu+1}^{(\nu)} \Big\} \Big\}$$
$$+ g^{mp-\mu-2}\Big\{ a_{\mu+2} - \sum_{\mu+2}^{m}{}' - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \Big(\sum_{\mu+2}^{m-\nu}{}' b_0^{(\nu)} + \sum_{\mu+1}^{m-\nu} b_1^{(\nu)} + \cdots + \sum_{0}^{m-\nu} b_{\mu+2}^{(\nu)} \Big) \Big\}$$
$$+ g^{mp-\mu-3}\Big\{ a_{\mu+3} - \sum_{\mu+3}^{m}{}' - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \Big(\sum_{\mu+3}^{m-\nu}{}' b_0^{(\nu)} + \sum_{\mu+2}^{m-\nu} b_1^{(\nu)} + \cdots + \sum_{0}^{m-\nu} b_{\mu+3}^{(\nu)} \Big) \Big\}$$
$$\vdots$$

dabei ist zu beachten, daß in den rechts auftretenden Summen für alle Größen $c_{\mu+\nu}$ $(\nu \geqq 1)$ Null zu setzen ist.

Der Rest, der entsteht, wenn man an Stelle des Wertes:

$$x = c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu}$$

den Wert:

$$x_1 = c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + (c_\mu + 1) g^{p-\mu}$$

benützt, sei durch P_μ^+ bezeichnet. Der gefundene Wert

$$c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu}$$

ist dann richtig, falls

$$\operatorname{sgn} P_\mu \neq \operatorname{sgn} P_\mu^+$$

und

$$x_1 = c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots + (c_\mu + 1) g^{p-\mu} \leqq \bar{C}_0$$

(Definition von $\bar{C}_0$ siehe S. 3);

denn dies bedeutet, daß die gesuchte Wurzel zwischen

$(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})$ und $(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + (c_\mu + 1) g^{p-\mu})$

liegt.

Haben sich insbesondere für die Größen $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ Ziffern ergeben, so sind dies tatsächlich die μ ersten Ziffern der Wurzel, falls

$$\operatorname{sgn} P_\mu \neq \operatorname{sgn} P_\mu^+$$

und

$$x_1 \leqq \bar{C}_0$$

ist.

Berechnung des Restes P_μ.

Der Koeffizient von $g^{mp-\mu-1}$ bei P_μ ist nichts anderes als r_μ' (siehe S. 12, 13). Bezeichnen wir demnach die erste Zeile von P_μ durch $g^{mp-\mu-1} r_\mu'$, desgleichen die Summe der ersten und zweiten Zeile mit $g^{mp-\mu-2} r_\mu''$, die Summe der drei ersten Zeilen mit $g^{mp-\mu-3} r_\mu'''$ usw., so berechnet sich $r_\mu^{(\nu)}$ aus $r_\mu^{(\nu-1)}$ in nachfolgender Weise:

$$r_\mu' = r_\mu g + a_{\mu+1} - \sum_{\mu+1}^{m}{}' - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \Big\{ \sum_{\mu+1}^{m}{}' - \nu\, b_0^{(\nu)} + \cdots + \sum_{0}^{m} - \nu\, b_{\mu+1}^{(\nu)} \Big\}$$

$$r_\mu'' = r_\mu' g + a_{\mu+2} - \sum_{\mu+2}^{m}{}' - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \Big\{ \sum_{\mu+2}^{m}{}' - \nu\, b_0^{(\nu)} + \cdots + \sum_{0}^{m} - \nu\, b_{\mu+2}^{(\nu)} \Big\}$$

$$r_\mu''' = r_\mu'' g + a_{\mu+3} - \sum_{\mu+3}^{m}{}' - \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \Big\{ \sum_{\mu+3}^{m}{}' - \nu\, b_0^{(\nu)} + \cdots + \sum_{0}^{m} - \nu\, b_{\mu+3}^{(\mu)} \Big\}$$

$$\vdots$$

Die Berechnung des Restes geschieht also ganz genau nach der früheren Regel, nur unterbleibt eine weitere Division mit $|A|$. Sind die Größen $b^{(\nu)}$ und a rational, so muß die Restrechnung von selbst ein Ende nehmen.

§ 11.

Diskussion des Restes für die Gleichungen $x^m = a$ und $x^m + bx^n = a$.

Ähnliche Restbetrachtungen, wie sie sich bei „Lüroth“, S. 148, 149 und 155, 156, für die Quadratwurzelausziehung und die Auflösung der Gleichung zweiten Grades finden, lassen sich in gewissem Umfange auch

für den allgemeinen Fall durchführen. Die Resultate werden jedoch zufolge der höheren Exponenten und der neu hinzukommenden Parameter $b_0', b_0'', b_0''', \ldots, b_0^{(m-1)}$, sowie $b_\varrho^{(\nu)} (\varrho > 0)$ sehr kompliziert und verlieren dadurch den praktischen Wert, den die entsprechenden Resultate für die genannten Fälle tatsächlich haben. In den meisten Fällen wird man daher rascher zum Ziele kommen, wenn man den Rest in der angegebenen Weise wirklich berechnet, als wenn man die genannten Ungleichungen aufstellt.

Wir werden deshalb für die allgemeine Gleichung

$$f(x) = x^m + b'x^{m-1} + b''x^{m-2} + \cdots + b^{(m-1)}x - a = 0$$

auf derartige Betrachtungen nicht eingehen, sondern uns darauf beschränken, für die beiden Spezialfälle:

$$x^m = a \quad \text{und} \quad x^m + bx^n = a$$

die erwähnten Ungleichungen aufzustellen, da sich diese unter gewisser Voraussetzung verhältnismäßig einfach gestalten und auch noch praktisch anwendbar sind.

Behandeln wir zunächst die Gleichung:

$$x^m = a.$$

Da wir uns nur mit den reellen und zwar den positiven reellen Wurzeln beschäftigen, können wir annehmen, es sei

$$a > 0.$$

Weiter setzen wir voraus, es hätten sich die Größen

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_\mu$$

als Ziffern ergeben, d. h. es bestehen die Relationen:

$$0 \leqq c_\nu \leqq g - 1. \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots, \mu.$$

Brechen wir die Rechnung mit c_μ ab, so entsteht ein gewisser Rest, der mit P_μ bezeichnet sei

$$P_\mu = a - (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})^m.$$

Ist die gefundene Zahl

$$c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu}$$

bis dahin richtig, so muß

$$P_\mu \geqq 0$$

dagegen

$$a - (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + (c_\mu + 1) g^{p-\mu})^m$$
$$= a - (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu} + g^{p-\mu})^m = P_\mu^+$$

negativ werden.

P_μ^+ berechnet sich:

$$\begin{aligned} P_\mu^+ = a &- (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})^m \\ &- \binom{m}{1} (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})^{m-1} g^{p-\mu} \\ &- \binom{m}{2} (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})^{m-2} g^{2(p-\mu)} - \cdots \\ &- g^{m(p-\mu)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\mu^+ = P_\mu - \Big\{ & m(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})^{m-1} g^{p-\mu} \\ & + \binom{m}{2} (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})^{m-2} g^{2(p-\mu)} + \cdots \\ & + g^{m(p-\mu)} \Big\} . \end{aligned}$$

Ist demnach P_μ positiv, so wird P_μ^+ negativ ausfallen, wenn

$$\begin{aligned} P_\mu < & \, m(c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})^{m-1} g^{p-\mu} \\ & + \binom{m}{2} (c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + \cdots + c_\mu g^{p-\mu})^{m-2} g^{2(p-\mu)} + \cdots + g^{m(p-\mu)}. \end{aligned}$$

Die Ausrechnung von P_μ (siehe S. 60) ergibt nun:

$$\begin{aligned} P_\mu = & \, g^{mp-\mu-1} \Big\{ g r_\mu + a_{\mu+1} - \sum_{\mu+1}^{m}{}' \Big\} + \\ & + g^{mp-\mu-2} \Big\{ a_{\mu+2} - \sum_{\mu+2}^{m}{}' \Big\} \\ & + g^{mp-\mu-3} \Big\{ a_{\mu+3} - \sum_{\mu+3}^{m}{}' \Big\} \\ & + \cdots \\ & \vdots \end{aligned}$$

Die Korrektionen setzen sich offenbar nur so lange fort, als Summen von der Form $\sum_{\mu+\nu}^{m}{}'$ möglich sind. Diese Summen können jedoch nicht unbegrenzt weiter gehen, da zu beachten ist, daß alle Größen $c_{\mu+\nu}$ $(\nu \gtreqless 1)$ gleich Null zu setzen sind. Demnach ist die letzte Summe, die als Korrektion auftreten kann: $\sum_{m \cdot \mu}^{m}{}' = c_\mu^m$.

Setzen wir jetzt:

$$P_\mu = g^{mp-\mu-1} R_\mu,$$

so können wir für R_μ eine Reihe von Ungleichungen ableiten.

Es ist:

$$\begin{aligned} R_\mu = g r_\mu + a_{\mu+1} - \sum_{\mu+1}^{m}{}' \\ + \left\{ a_{\mu+2} - \sum_{\mu+2}^{m}{}' \right\} \gamma \\ + \left\{ a_{\mu+3} - \sum_{\mu+3}^{m}{}' \right\} \gamma^2 \\ + \left\{ a_{\mu+4} - \sum_{\mu+4}^{m}{}' \right\} \gamma^3 \\ + \cdots \\ \vdots \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{g} = \gamma$ gesetzt ist.

Demnach folgt aus der Voraussetzung, daß die Größen c_ν sich als Ziffern ergeben sollen, also

$$0 \leqq c_\nu \leqq g - 1 \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots, \mu$$

$$R_\mu < \underbrace{g r_\mu + a_{\mu+1} - \sum_{\mu+1}^{m}{}'}_{} + a_{\mu+2}\gamma + a_{\mu+3}\gamma^2 + \cdots$$

$$R_\mu < \quad r'_\mu + (g-1)(\gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \cdots)$$

$$(1) \qquad R_\mu < \quad r'_\mu + 1.$$

Für r'_μ gilt die Ungleichung:

$$r'_\mu < g r_\mu + g - 1.$$

Demnach besteht auch die Relation:

$$R_\mu < g r_\mu + g + 1 - 1$$

$$(2) \qquad R_\mu < g(r_\mu + 1).$$

Andererseits ist:

$$(3) \qquad R_\mu > r_\mu g - \sum_{\mu+1}^{m}{}' - \gamma \sum_{\mu+2}^{m}{}' - \gamma^2 \sum_{\mu+3}^{m}{}' - \gamma^3 \sum_{\mu+4}^{m}{}' - \cdots$$

Es läßt sich zeigen, daß die Summen $\sum_{\mu+\nu}^{m}{}' \; (\nu > 0)$ sämtlich der Ungleichung genügen:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu+\nu}^{m}{}' < \frac{m(m-1)}{2} c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)(g-1) \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 2} c_0^{m-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2(g-1) \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3} c_0^{m-4}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^3(g-1). \\ \vdots \end{aligned} \qquad (4)$$

Daß diese Relation tatsächlich besteht, folgt schon daraus, daß aus der rechten Seite der Ungleichung (4) jedes Monom von $\sum_{\mu+\nu}^{m}{}'$ erhalten werden kann, wenn man an Stelle des Faktors $(g-1)$ wieder eine passende Größe $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_\mu$ einsetzt, und daß ferner jedes Monom $(c_1{}^\alpha c_2{}^\beta \ldots c_\varrho{}^\lambda)$ mit einem gewissen Faktor multipliziert ist, der größer ist als der zugehörige Polynomialkoeffizient $\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$, oder mindestens gleich diesem.

Der strenge Beweis gestaltet sich folgendermaßen:

Daß alle möglichen, d. i. verschiedenartigen Monome von

$$\sum_{\substack{m-\nu+\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu+\tau}} c_0{}^{m-\nu} c_1{}^\alpha c_2{}^\beta \ldots c_\varrho{}^\lambda,$$

wobei τ eine beliebige Zahl $\geqq 1$ bedeutet, aus

$$\frac{m(m-1)}{2} c_0{}^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)(g-1)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2} c_0{}^{m-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2(g-1)+\cdots$$

erhalten werden können, wenn man an Stelle von $(g-1)$ wieder eine der Größen $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ einsetzt, folgt ohne weiteres; denn in

$$(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^{\nu-1}$$

sind alle möglichen Monome der Form $(c_1{}^\alpha c_2{}^\beta \ldots c_\varrho{}^\lambda)$, wobei $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=\nu-1$, $\alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu+\tau_1$ ist, enthalten, die überhaupt vorkommen können. τ_1 bedeutet dabei eine der Zahlen $\tau-1, \tau-2, \cdots, \tau-\mu$. — Es sei nochmals bemerkt, daß alle Größen $c_{\mu+\sigma}$, wobei $\sigma \geqq 1$ ist, gleich Null zu setzen sind, wodurch natürlich auch für das Gewicht eines Monoms eine bestimmte obere Grenze gegeben ist. —

Die Monome der Form $\sum_{\substack{\alpha+\beta+\cdots+\lambda=\nu-1 \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu+\tau_1}} (c_1{}^\alpha c_2{}^\beta \ldots c_\varrho{}^\lambda)$ liefern dann in Verbindung mit $c_0{}^{m-\nu}$ und $(g-1)$, wobei für $(g-1)$ wieder eine passende der Größen $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ einzusetzen ist, um das gewünschte Gewicht zu erhalten, alle möglichen Monome der Form $\sum_{\substack{m-\nu+\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu+\tau}} c_0{}^{m-\nu} c_1{}^\alpha c_2{}^\beta \ldots c_\varrho{}^\lambda$.

Es handelt sich also lediglich darum, nachzuweisen, daß die Zahlenkoeffizienten, die in

$$\frac{m(m-1)}{2} c_0{}^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)(g-1)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2} c_0{}^{m-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2(g-1)+\cdots$$

bei den einzelnen Monomen stehen, gleich oder größer als diejenigen

Koeffizienten sind, die bei den entsprechenden Monomen von

$$\sum \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\cdots\lambda!\,(m-\nu)!}\, c_0^{m-\nu} c_1^{\alpha} c_2^{\beta}\cdots c_\varrho^{\lambda}$$

vorkommen.

Zu dem Zwecke vergleichen wir diese einander entsprechenden Zahlenkoeffizienten.

Nehmen wir ein beliebiges Monom von

$$\frac{m(m-1)}{2}\, c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)(g-1)$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}\, c_0^{m-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2(g-1) + \cdots,$$

etwa

$$c_0^{m-\nu} c_1^{\alpha} c_2^{\beta}\ldots c_\varrho^{\lambda};$$
$$\alpha+\beta+\cdots+\lambda=\nu-1$$

das Gewicht spielt in folgender Betrachtung keine Rolle.

Zu diesem Monom kommt entsprechend dem Faktor $(g-1)$ noch eine bestimmte der Größen $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$, etwa c_σ, so daß man schließlich das Monom erhält:

$$c_0^{m-\nu} c_1^{\alpha} c_2^{\beta}\ldots c_\varrho^{\lambda} c_\sigma.$$

c_σ kann dabei gleich einer der schon auftretenden Größen $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ sein oder von diesen verschieden.

Der Zahlenkoeffizient, der bei diesem Monom steht, lautet:

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-\nu+1)}{2(\nu-1)} \cdot \frac{(\nu-1)!}{\alpha!\,\beta!\cdots\lambda!}.$$

Bei

$$\sum \frac{m!}{(m-\nu)!\,\alpha!\,\beta!\cdots\lambda!}\, c_0^{m-\nu} c_1^{\alpha} c_2^{\beta}\cdots c_\varrho^{\lambda}$$

würde diesem Monom der Koeffizient $\frac{m!}{(m-\nu)!\,\alpha_1!\,\beta_1!\cdots\lambda_1!}$ zukommen, wobei $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\cdots$, $\lambda_1 = \lambda$ zu setzen ist, wenn c_σ von den schon auftretenden Größen $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ verschieden war, sonst ist eine der Größen $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ um eins größer als die entsprechende der Größen $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, während die übrigen bzw. gleich sind.

Daraus folgt, daß

$$\alpha_1!\,\beta_1!\cdots\lambda_1! \gtreqless \alpha!\,\beta!\cdots\lambda!$$

und mithin:

$$\frac{1}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!} \lesseqgtr \frac{1}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

Demnach ist $\frac{m(m-1)\cdots(m-\nu+1)(\nu-1)!}{2(\nu-1)\,\alpha!\,\beta!\cdots\lambda!}$ jedenfalls dann stets gleich oder größer als

$$\frac{m!}{(m-\nu)!\,\alpha_1!\,\beta_1!\cdots\lambda_1!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-\nu+1)}{\alpha_1!\,\beta_1!\cdots\lambda_1!},$$

wenn

$$(\nu-1)! \geqq 2(\nu-1)$$

ist.

Dies ist stets der Fall, wenn $(\nu - 1) \geqq 3$ ist.

Ist also $(\nu - 1) \geqq 3$, so folgt aus der vorangegangenen Betrachtung, daß bei den einzelnen Monomen von

$$\frac{m(m-1)}{2} c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)(g-1)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 2} c_0^{m-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2(g-1) + \cdots$$

auch Zahlenkoeffizienten stehen, die gleich oder größer sind als diejenigen, die bei den entsprechenden Monomen von

$$\sum \frac{m!}{(m-\nu)!\,\alpha!\,\beta! \cdots \lambda!} c_0^{m-\nu} c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \cdots c_\varrho^{\lambda}$$

auftreten.

Es bedürfen also lediglich noch die Fälle

$$(\nu - 1) = 1 \text{ sowie } (\nu - 1) = 2$$

einer besonderen Betrachtung.

Daß auch für den Fall $(\nu - 1) = 1$ das Gesagte gilt, läßt sich auf folgende Weise zeigen:

Die Summe

$$\sum_{\substack{m-\nu+\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m \\ \alpha+2\beta+\cdots+\varrho\lambda=\mu+\tau}} \frac{m!}{(m-\nu)!\,\alpha!\,\beta! \ldots \lambda!} c_0^{m-\nu} c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \ldots c_\varrho^{\lambda}$$

kann man, falls $\nu = 2$ ist, offenbar auch in der Form schreiben:

$$\frac{m!}{2!\,(m-2)!} c_0^{m-2}\{c_\tau c_\mu + c_{\tau+1} c_{\mu-1} + \cdots + c_\mu c_\tau\}.$$

Setzen wir in der Klammer an Stelle der zweiten Größe c jeweils die Größe $g - 1$, die gleich oder größer als die c ist, so erhalten wir den Ausdruck:

$$\frac{m(m-1)}{2} c_0^{m-2}\{c_\tau(g-1) + c_{\tau+1}(g-1) + \cdots + c_\mu(g-1)\}$$
$$= \frac{m(m-1)}{2} c_0^{m-2}\{c_\tau + c_{\tau+1} + \cdots + c_\mu\}(g-1).$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als:

$$\frac{m(m-1)}{2} c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)(g-1),$$

womit das Gesagte bewiesen ist.

In ganz analoger Weise lassen sich auch für $(\nu - 1) = 2$ die genannten Beziehungen verifizieren, und sei aus diesem Grunde nicht mehr näher darauf eingegangen

Natürlich gilt die Ungleichung (4) nur unter der Voraussetzung, daß $0 \leqq c_\nu \leqq g - 1$ ist, und daß alle $c_{\mu+\nu}$ verschwinden, bei denen $\nu \geqq 1$ wird.

An Stelle der Summen $\sum_{\mu+1}^{m}{}', \sum_{\mu+2}^{m}{}', \ldots$ führen wir jetzt in die Ungleichung (3) jeweils den größeren Ausdruck:

$$(g-1)\Big\{\frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu) + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}c_0^{m-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3}c_0^{m-4}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^3+\cdots\Big\}$$

ein, wodurch die Ungleichung nur noch verstärkt wird; dann ist:

$$R_\mu > r_\mu g - (g-1)\Big\{\frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)+\cdots\Big\} - (g-1)\gamma\Big\{\frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)+\cdots\Big\} - (g-1)\gamma^2\Big\{\frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)+\cdots\Big\} \vdots$$

Daraus folgt weiter:

$$R_\mu > r_\mu g - \Big\{\frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)+\cdots\Big\}(g-1)(1+\gamma+\gamma^2+\gamma^3+\cdots)$$

$$R_\mu > r_\mu g - g\Big\{\frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)+\cdots\Big\}$$

$$R_\mu > g\Big\{r_\mu - \frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu) - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}c_0^{m-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2 - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3}c^{m-4}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^3-\cdots\Big\}.$$

R_μ ist demnach größer als Null, und somit c_μ nicht zu groß, falls

$$r_\mu > \frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}c_0^{m-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2 + \cdots$$

Für $m=2$ erhalten wir in Übereinstimmung mit „Lüroth“, S. 149, Ungleichung (5):

$$R_\mu > g\{r_\mu - c_1 - c_2 - c_3 - \cdots - c_\mu\}.$$

Umgekehrt ist c_μ zu groß, falls $R_\mu < 0$, oder, wie aus Ungleichung (1) folgt, falls

$$r'_\mu < 0$$

ist.

Ersetzen wir c_μ durch $c_\mu - 1$ bzw. $c_\mu + 1$, so möge aus R_μ entstehen R_μ^- bzw. R_μ^+.

Dann folgt:

$$\begin{aligned} R_\mu^+ = R_\mu &- g m(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} \\ &- g^{-\mu+1}\binom{m}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-2} \\ &- g^{-2\mu+1}\binom{m}{3}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-3} \\ &\vdots \\ &- g^{-(m-2)\mu+1} m(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu) \\ &- g^{-(m-1)\mu+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_\mu^+ = R_\mu &- g m(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} \\ &- g\binom{m}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-2}\gamma^\mu \\ &- g\binom{m}{3}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-3}\gamma^{2\mu} \\ &\vdots \\ &- g m(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)\gamma^{(m-2)\mu} \\ &- g\gamma^{(m-1)\mu}. \end{aligned}$$

Demgegenüber ist:

$$\begin{aligned} R_\mu^- = R_\mu &+ g m(c_0 + c_1\gamma + c_2\gamma^2 + \cdots c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} \\ &- g\binom{m}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-2}\gamma^\mu \\ &+ g\binom{m}{3}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-3}\gamma^{2\mu} \\ &- \cdots \\ &\vdots \\ &- (-1)^{m-1} g m(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)\gamma^{(m-2)\mu} \\ &- (-1)^m g\gamma^{(m-1)\mu}. \end{aligned}$$

Da $R_\mu < g(r_\mu + 1)$ ist, gilt für R_μ^+ die Relation:

$$\begin{aligned} R_\mu^+ < g(r_\mu + 1) &- g m(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} \\ &- g\binom{m}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-2}\gamma^\mu \\ &- g\binom{m}{3}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-3}\gamma^{2\mu} \\ &- \cdots \\ &\vdots \\ &- g\gamma^{(m-1)\mu}. \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} R_\mu^+ < g\{r_\mu + 1 &- m(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} - \cdots \\ &- m(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)\gamma^{(m-2)\mu} - \gamma^{(m-1)\mu}\}. \end{aligned}$$

Dies ergibt für $m = 2$

$$R_\mu^+ < g\{r_\mu + 1 - 2c_0 - 2c_1\gamma - 2c_2\gamma^2 - \cdots - 2c_\mu\gamma^\mu - \gamma^\mu\}$$

in Übereinstimmung mit „Lüroth“, S. 150.

Andererseits ist:

$$R_\mu > g\Big\{r_\mu - \frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu) - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}c_0^{m-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2 - \cdots\Big\}$$

und demnach:

$$\begin{aligned} R_\mu^- > g\Big\{&r_\mu - \frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu) \\ &- \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}c_0^{m-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2 - \cdots\Big\} \\ &+ gm(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} \\ &- g\binom{m}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-2}\gamma^\mu \\ &+ \cdots \\ &\vdots \\ &- (-1)^{m-1}gm(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)\gamma^{(m-2)\mu} \\ &- (-1)^m g\gamma^{(m-1)\mu}. \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} R_\mu^- > g\Big\{&r_\mu - \frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu) \\ &- \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}c_0^{m-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2 - \cdots \\ &+ m(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} \\ &- \binom{m}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-2}\gamma^\mu \\ &+ \cdots \\ &- \cdots\Big\}, \end{aligned}$$

woraus sich im Falle $m = 2$ ergibt:

$$R_\mu^- > g\{r_\mu - c_1 - c_2 - \cdots - c_\mu + 2c_0 + 2c_1\gamma + \cdots + 2c_\mu\gamma^\mu - \gamma^\mu\}$$

(vgl. „Lüroth“, S. 150).

Diese Ungleichungen für R_μ^- und R_μ^+ können zur Beurteilung der Sicherheit der gefundenen Werte $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ dienen; denn ist $R_\mu^- > 0$, so ist $c_\mu - 1$ sicher nicht zu groß, sondern höchstens zu klein. Ist andererseits $R_\mu^+ < 0$, so ist $c_\mu + 1$ zu groß.

Fast genau dieselben Betrachtungen lassen sich an die Gleichung $x^m + bx^n = a$, wobei $a > 0$ und $m > n$ ist, anschließen.

Der Einfachheit wegen nehmen wir an, b sei eine rationale Zahl und c_0 so gewählt, daß bei der Zerlegung:

$$b = b_0 g^{(m-n)p} + b_1 g^{(m-n)p-1} + b_2 g^{(m-n)p-2} + \cdots$$

sämtliche Größen $b_1, b_2, b_3, \ldots$, verschwinden; dies kann offenbar stets erreicht werden, wenn man nur c_0 groß genug wählt.

Für das Folgende müssen wir unterscheiden, ob $b > 0$ oder $b < 0$ ist. Da sich die Betrachtungen für beide Fälle ganz gleich gestalten, wollen wir uns auf den Fall $b > 0$ beschränken.

Wir setzen wieder voraus, die Größen $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ hätten sich als Ziffern ergeben.

Für P_μ ergibt sich jetzt:

$$\begin{aligned} P_\mu = {} & g^{mp-\mu-1}\left\{r_\mu g + a_{\mu+1} - \sum_{\mu+1}^{m}{}' - b_0 \sum_{\mu+1}^{n}{}'\right\} \\ & + g^{mp-\mu-2}\left\{a_{\mu+2} - \sum_{\mu+2}^{m}{}' - b_0 \sum_{\mu+2}^{n}{}'\right\} \\ & + g^{mp-\mu-3}\left\{a_{\mu+3} - \sum_{\mu+3}^{m}{}' - b_0 \sum_{\mu+3}^{n}{}'\right\} \\ & + \cdots \\ & \vdots \end{aligned}$$

Setzen wir demnach:

$$P_\mu = g^{mp-\mu-1} R_\mu,$$

so gelten für R_μ zunächst die früheren Ungleichungen

$$\begin{aligned} &1) \quad R_\mu < r'_\mu + 1, \\ &2) \quad R_\mu < g(r_\mu + 1). \end{aligned}$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} R_\mu > {} & r_\mu g - \sum_{\mu+1}^{m}{}' - \gamma \sum_{\mu+2}^{m}{}' - \gamma^2 \sum_{\mu+3}^{m}{}' - \cdots \\ & - b_0 \left\{\sum_{\mu+1}^{n}{}' + \gamma \sum_{\mu+2}^{n}{}' + \gamma^2 \sum_{\mu+3}^{n}{}' + \gamma^3 \sum_{\mu+4}^{n}{}' + \cdots\right\}. \end{aligned}$$

Für die Summen $\sum_{\mu+\nu}^{m}{}'$ bzw. $\sum_{\mu+\nu}^{n}{}'$ besteht nach wie vor die Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{\mu+\nu}^{m}{}' < (g-1)\Big\{ & \frac{m(m-1)}{2} c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu) \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 2} c_0^{m-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2 \\ & + \cdots \\ & \vdots \Big\} \end{aligned}$$

Daraus folgt für R_μ:

$$\begin{aligned} R_\mu > r_\mu g &- g\Big\{\frac{m(m-1)}{2} c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu) \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2} c_0^{m-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2 + \cdots\Big\} \\ &- g b_0\Big\{\frac{n(n-1)}{2} c_0^{n-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 2} c_0^{n-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2 + \cdots\Big\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} R_\mu > g\Big\{r_\mu &- \frac{m(m-1)}{2} c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu) \\ &- \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2} c_0^{m-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2 - \cdots \\ &- b_0\Big(\frac{n(n-1)}{2} c_0^{n-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 2} c_0^{n-3}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu)^2 + \cdots\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Hat insbesondere n den Wert 1, so fällt der mit b_0 behaftete Teil weg, und man hat in diesem speziellen Falle:

$$\begin{aligned} R_\mu > g\Big\{r_\mu &- \frac{m(m-1)}{2} c_0^{m-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_\mu) \\ &- \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2} c_0^{m-3}(c_1 + \cdots + c_\mu)^2 - \cdots\Big\} \end{aligned}$$

Behalten wir die Definition der Größen R_μ^- und R_μ^+ bei, dann ist:

$$\begin{aligned} R_\mu^+ = R_\mu &- gm(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} \\ &- g\binom{m}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-2}\gamma^\mu \\ &- g\binom{m}{3}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-3}\gamma^{2\mu} \\ &- \cdots \\ &- gm(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)\gamma^{(m-2)\mu} \\ &- g\gamma^{(m-1)\mu} \\ &- g^{(n-m)p+1} b\Big\{n(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{n-1} \\ &\qquad + \binom{n}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{n-2}\gamma^\mu \\ &\qquad + \binom{n}{3}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{n-3}\gamma^{2\mu} \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad + \gamma^{(n-1)\mu}\Big\}. \end{aligned}$$

Dagegen:

$$\begin{aligned} R_\mu^- = R_\mu &+ gm(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} \\ &- g\binom{m}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-2}\gamma^\mu \\ &+ \cdots \\ &- (-1)^m g\gamma^{(m-1)\mu} \\ &- g^{(n-m)p+1}b\Big\{-n(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{n-1} \\ &\qquad + \binom{n}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{n-2}\gamma^\mu \\ &\qquad - \cdots \\ &\qquad + (-1)^n\gamma^{(n-1)\mu}\Big\}. \end{aligned}$$

Zufolge der Relationen:

$$R_\mu < g(r_\mu + 1),$$
$$b_0 g^{(m-n)p} = b$$

besteht dann die Ungleichung:

$$\begin{aligned} R_\mu^+ < g(r_\mu + 1) &- gm(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} \\ &- g\binom{m}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-2}\gamma^\mu - \cdots \\ &- gb_0\Big\{n(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{n-1} \\ &\qquad + \binom{n}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{n-2}\gamma^\mu + \cdots\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_\mu^+ < g\Big\{r_\mu + 1 &- m(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-1} \\ &- \binom{m}{2}(c_0 + c_1\gamma + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{m-2}\gamma^\mu - \cdots \\ &- b_0\Big(n(c_0 + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{n-1} + \binom{n}{2}(c_0 + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)^{n-2}\gamma^\mu + \cdots\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Wir verstärken diese Ungleichungen noch, wenn wir an Stelle von $(c_0 + c_1\gamma + c_2\gamma^2 + \cdots + c_\mu\gamma^\mu)$ die Größe c_0 setzen; dann ist:

$$\begin{aligned} R_\mu^+ < g\Big\{r_\mu + 1 &- mc_0^{m-1} - \binom{m}{2}c_0^{m-2}\gamma^\mu - \cdots \\ &- b_0\Big(nc_0^{n-1} + \binom{n}{2}c_0^{n-2}\gamma^\mu + \binom{n}{3}c_0^{n-3}\gamma^{2\mu} + \cdots\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Für den Fall $n = 1$ ergibt dies:

$$R_\mu^+ < g\Big\{r_\mu + 1 - b_0 - mc_0^{m-1} - \binom{m}{2}c_0^{m-2}\gamma^\mu - \cdots\Big\}.$$

Andererseits ist wegen der Ungleichung:

$$R_\mu > g\Big\{r_\mu - \frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu) - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}c_0^{m-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2+\cdots - b_0\Big(\frac{n(n-1)}{2}c_0^{n-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 2}c_0^{n-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2+\cdots\Big)\Big\}$$

und, weil

$$b = b_0 g^{(m-n)p}$$

ist,

$$R_\mu > g\Big[r_\mu - \frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu) - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}c_0^{m-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2-\cdots - b_0\Big\{\frac{n(n-1)}{2}c_0^{n-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 2}c_0^{n-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2+\cdots\Big\}\Big] + gmc_0^{m-1} - g\binom{m}{2}(c_0+1)^{m-2}\gamma^\mu + g\binom{m}{3}c_0^{m-3}\gamma^{2\mu}-\cdots - b_0 g\Big\{-nc_0^{n-1} + \binom{n}{2}(c_0+1)^{n-2}\gamma^\mu - \binom{n}{3}c_0^{n-3}\gamma^{2\mu}+\cdots\Big\}.$$

Daraus folgt:

$$R_\mu > g\Big[r_\mu - \frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu) - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}c_0^{m-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2-\cdots - b_0\Big\{\frac{n(n-1)}{2}c_0^{n-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)+\cdots\Big\}\Big] + mc_0^{m-1} - \binom{m}{2}(c_0+1)^{m-2}\gamma^\mu + \binom{m}{3}c_0^{m-3}\gamma^{2\mu}-\cdots - b_0\Big\{-nc_0^{n-1} + \binom{n}{2}(c_0+1)^{n-2}\gamma^\mu - \binom{n}{3}c_0^{n-3}\gamma^{2\mu}+\cdots\Big\}.$$

Ist $n = 1$, so folgt:

$$R_\mu > g\Big[r_\mu - \frac{m(m-1)}{2}c_0^{m-2}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu) - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 2}c_0^{m-3}(c_1+c_2+\cdots+c_\mu)^2-\cdots + mc_0^{m-1} - \binom{m}{2}(c_0+1)^{m-2}\gamma^\mu + \binom{m}{3}c_0^{m-3}\gamma^{2\mu}-\cdots + b_0\Big].$$

Diese Ungleichungen können wieder zur Beurteilung der Richtigkeit der gefundenen Werte $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_\mu$ dienen.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich naturgemäß noch für viele andere Gleichungen anstellen; es sei jedoch nicht weiter darauf eingegangen, da aus dem Vorangegangenen erhellt, wie man im einzelnen Falle zu den analogen Relationen gelangen kann.

Für die Berechnung der Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sei noch folgende Bemerkung angefügt: Hat man die $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_\mu$ als Ziffern erhalten und mit Hilfe der Ungleichungen oder sonstwie festgestellt, daß dieselben richtige Dezimalen der zu bestimmenden Wurzel sind, so ist es zweckmäßig, vorausgesetzt daß man noch mehrere Dezimalen berechnen will, von c_0 zu einem neuen $\bar{c}_0$ überzugehen, wobei in $\bar{c}_0$ die schon gefundenen Dezimalen $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ enthalten sind. Man wird dann in der Regel wieder eine Anzahl von Größen c, etwa $c_{\mu+1}, c_{\mu+2}, c_{\mu+3}, \ldots, c_{\mu+\tau}$ als Ziffern erhalten und kann dann wieder zu einem neuen $\bar{\bar{c}}_0$ übergehen. Wie groß τ ist, läßt sich für den allgemeinen Fall nicht angeben; auch kann man nicht streng beweisen, daß

$$\tau \geqq \mu$$

ist, welche Vermutung sehr nahe liegt.

Daß es aber zweckmäßig ist, bei der Berechnung von $c_1, c_2, \ldots$ in der angegebenen Weise vorzugehen, folgt schon daraus, daß die Reihe um so besser, d. i. rascher konvergiert, je größer c_0 von Anfang an gewählt war (siehe Konvergenzbeweis).

Das Resultat unserer Untersuchungen ist also folgendes:

Hat man die reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung zu bestimmen, so kann man für jede reelle (positive) Wurzel, von der mindestens die erste von Null verschiedene Dezimale als bekannt vorausgesetzt wird, zunächst formal die Reihe bilden:

$$c_0 g^p + c_1 g^{p-1} + c_2 g^{p-2} + \cdots.$$

Dann ist gezeigt, daß man c_0 stets so bestimmen kann, daß diese Reihe unbedingt konvergent ist und eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung darstellt.

Weiter wurde bewiesen, daß diese Reihe um so besser, d. i. rascher konvergiert, je größer c_0 von Anfang an gewählt wird.

Abgesehen von der Kenntnis der ersten (ev. auch mehrerer) Dezimalen der zu bestimmenden Wurzel wurde nur vorausgesetzt, daß die Gleichung keine mehrfachen Wurzeln habe.

§ 12.

Diskussion der Gleichung $x^{m+1} + bx = a$.

Wenn die im Vorangegangenen entwickelte Methode zur Auflösung numerischer Gleichungen als die „Fouriersche“ bezeichnet wurde, so ist dies insofern gerechtfertigt, als die Gleichungen, die zur Bestimmung der Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ dienten, analog gebildet wurden, wie diejenigen, die Fourier für die geordnete Division gibt.

Ausser der geordneten Division hat Fourier S. 185 u. f. noch Gleichungen behandelt, die sich in die Form bringen lassen:

$$x = \frac{a}{b + f(x)},$$

wobei unter $f(x)$ eine ganze rationale Funktion zu verstehen ist, die für den zu bestimmenden Wert x im Verhältnis zu b klein ausfällt.

Ist insbesondere eine trinomische Gleichung der besonderen Form:

$$x^{m+1} + bx = a$$

gegeben, so kann man diese auch schreiben:

$$x = \frac{a}{b + x^m}.$$

Für die trinomischen Gleichungen dieser Form bestimmt Fourier, S. 185 u. f., die Wurzel x, indem er a nach den Regeln der geordneten Division durch b teilt und hierbei die von x^m herrührenden Korrektionen berücksichtigt.

Mit einer solchen trinomischen Gleichung $x^{m+1} + bx = a$ wollen wir uns im folgenden noch näher befassen, und einige Bemerkungen anfügen, die sich auf die von Fourier angegebene Methode beziehen.

Wir beschränken uns auf den Fall:

$$0 < a < b.$$

Die Gleichung $x^{m+1} + bx = a$ hat dann offenbar eine reelle positive Wurzel, die kleiner als 1 ist, und für die also die Entwicklung gilt:

$$x = c_0 g^{-r} + c_1 g^{-r-1} + c_2 g^{-r-2} + \cdots$$
$$r \geqq 1$$
$$0 < c_0 \leqq g - 1.$$

x^m hat dann ebenfalls die Form:

$$x^m = c_0' g^{-\varrho} + c_1' g^{-\varrho-1} + c_2' g^{-\varrho-2} + c_3' g^{-\varrho-3} + \cdots,$$

wobei die Größen $c_0', c_1', c_2', c_3', \ldots$ Ziffern sind und $\varrho \geqq r$ ist.

Wir nehmen an, die zu bestimmende Wurzel sei bis inkl. der ersten von Null verschiedenen Dezimale bekannt, dann ist also c_0 und r bestimmt.

Wir können demnach, wie es S. 5 und 6 gezeigt wurde, a und b in die Form bringen:

$$a = a_0 g^p + a_1 g^{p-1} + a_2 g^{p-2} + \cdots$$
$$b = b_0 g^{p+r} + b_1 g^{p+r-1} + b_2 g^{p+r-2} + \cdots,$$

wobei a_0 und b_0 bestimmte endliche Zahlen sind, während $a_1, a_2, a_3, \ldots$, $b_1, b_2, b_3, \ldots$ Ziffern bedeuten; p selbst kann beliebig gewählt werden, nur soll die Ungleichung bestehen:

(1) $$p + r > -\varrho.$$

Für das Folgende nehmen wir an, eine derartige Zerlegung von a und b sei möglich.

In die Gleichung

$$x = \frac{a}{b + \overline{x^m}}$$

führen wir jetzt die Werte ein:

$$x = c_0 g^{-r} + c_1 g^{-r-1} + c_2 g^{-r-2} + \cdots$$
$$a = a_0 g^p + a_1 g^{p-1} + a_2 g^{p-2} + \cdots$$
$$b = b_0 g^{p+r} + b_1 g^{p+r-1} + b_2 g^{p+r-2} + \cdots$$
$$x^m = c_0' g^{-\varrho} + c_1' g^{-\varrho-1} + c_2' g^{-\varrho-2} + \cdots.$$

Dann ist:

(2) $$c_0 g^{-r} + c_1 g^{-r-1} + c_2 g^{-r-2} + \cdots$$
$$= \frac{a_0 g^p + a_1 g^{p-1} + a_2 g^{p-2} + \cdots}{b_0 g^{p+r} + b_1 g^{p+r-1} + \cdots + c_0' g^{-\varrho} + c_1' g^{-\varrho-1} + \cdots},$$

wobei zu beachten ist, daß zu Beginn der Rechnung die Größen

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, \text{ sowie } c_0', c_1', c_2', \ldots$$

unbekannt sind.

Aus Gleichung (2) folgt:

$$(c_0 g^{-r} + c_1 g^{-r-1} + \cdots)(b_0 g^{p+r} + b_1 g^{p+r-1} + b_2 g^{p+r-2} + \cdots + c_0' g^{-\varrho} + c_1' g^{-\varrho-1} + \cdots) = a_0 g^p + a_1 g^{p-1} a_2 g^{p-2} + \cdots$$

Nach Voraussetzung ist:

$$p + r > -\varrho.$$

Es wird sich demnach eine Zahl $\sigma \geqq 1$ so bestimmen lassen, daß

$$p + r - \sigma = -\varrho$$

ist.

Ersetzen wir demgemäß $-\varrho$ durch $p + r - \sigma$, so ist:

$$\begin{aligned}(c_0 g^{-r} + c_1 g^{-r-1} + c_2 g^{-r-2} + \cdots)(b_0 g^{p+r} + b_1 g^{p+r-1} + \cdots \\ + b_{\sigma-1} g^{p+r-\sigma+1} + b_\sigma g^{p+r-\sigma} + \cdots \\ + c_0' g^{p+r-\sigma} + c_1' g^{p+r-\sigma-1} + c_2' g^{p+r-\sigma-2} + \cdots) \\ = a_0 g^p + a_1 g^{p-1} + a_2 g^{p-2} + \cdots\end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned}(c_0 g^{-r} + c_1 g^{-r-1} + c_2 g^{-r-2} + \cdots)(b_0 g^{p+r} + b_1 g^{p+r-1} + \cdots \\ + b_{\sigma-1} g^{p+r-\sigma+1} + (b_\sigma + c_0') g^{p+r-\sigma} \\ + (b_{\sigma+1} + c_1') g^{p+r-\sigma-1} + \cdots) \\ = a_0 g^p + a_1 g^{p-1} + a_2 g^{p-2} + \cdots\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird erfüllt sein, wenn es gelingt $c_1, c_2, c_3, \ldots$ so zu bestimmen, daß die Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} b_0 c_0 &= a_0 \\ b_0 c_1 + b_1 c_0 &= a_1 \\ &\vdots \\ b_0 c_{\sigma-1} + b_1 c_{\sigma-2} + b_2 c_{\sigma-3} + \cdots + b_{\sigma-1} c_0 &= a_{\sigma-1} \\ b_0 c_\sigma + b_1 c_{\sigma-1} + \cdots + (b_\sigma + c_0') c_0 &= a_\sigma \\ b_0 c_{\sigma+1} + b_1 c_\sigma + \cdots + (b_\sigma + c_0') c_1 + (b_{\sigma+1} + c_1') c_0 &= a_{\sigma+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ganz genau wie auf S. 9 gehen wir von diesem System zu folgendem über:

$$\begin{aligned} & b_0 c_0 + r_0 = a_0 \\ & b_0 c_1 + r_1 = g r_0 + a_1 - c_0 b_1 \\ & \vdots \\ (\mathrm{I}) \qquad & b_0 c_\sigma + r_\sigma = g r_{\sigma-1} + a_\sigma - c_0 (b_\sigma + c_0') - \cdots - c_{\sigma-1} b_1 \\ & b_0 c_{\sigma+1} + r_{\sigma+1} = g r_\sigma + a_{\sigma+1} - c_0 (b_{\sigma+1} + c_1') - \cdots - c_\sigma b_1 \\ & \vdots \end{aligned}$$

Die Ungleichung (1) kommt also darauf hinaus, daß die Korrektionen, die von x^m herrühren und sich zuerst in der $\sigma + 1^{\text{ten}}$ Gleichung von (I) bemerkbar machen, wegen $\sigma \geqq 1$, nicht schon in der ersten Gleichung (I) auftreten. Die Bedingung (1) ist also erforderlich, weil ohne sie offenbar ein Rechnen unmöglich wäre.

Die Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{\sigma-1}$ sind jetzt vollkommen bestimmt, wenn wir festsetzen, daß die Größen $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{\sigma-1}$ sämtlich der Ungleichung genügen:

$$0 \leqq r_\lambda < b_0, \quad 0 < \lambda \leqq \sigma - 1.$$

Dasselbe gilt aber unter der analogen Voraussetzung:

$$0 \leqq r_\mu < b_0, \quad \mu \geqq \sigma$$

auch für die Größen c_σ, $c_{\sigma+1}$, $c_{\sigma+2}$, ..., wenn wir nur die Größen c_0', c_1', c_2', ... als bekannt annehmen. Was diese Größen anbelangt, so gibt es kein Verfahren, das diese der Reihe nach direkt liefert, man muß sie vielmehr, wie folgt, bestimmen:

Hat man $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{\sigma-1}$ gefunden, so berechne man:

$$(c_0 g^{-r} + c_1 g^{-r-1} + \cdots + c_{\sigma-1} g^{-r-\sigma+1})^m$$

und

$$(c_0 g^{-r} + c_1 g^{-r-1} + \cdots + (c_{\sigma-1} + 1) g^{-r-\sigma+1})^m.$$

Diese beiden Werte stimmen dann in einer gewissen Anzahl von Dezimalen überein, und diese Dezimalen sind bezüglich die Größen c_0', c_1', c_2', ...

Für das Folgende nehmen wir an, daß jeweils diejenigen c_ν' bekannt sind, die für die Korrektion in Frage kommen. Dieselben genügen der Bedingung:

$$0 \leqq c_\nu' \leqq g - 1. \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Es bleibt nun noch der Nachweis übrig, daß die jetzt formal bestimmte Reihe:

$$c_0 g^{-r} + c_1 g^{-r-1} + c_2 g^{-r-2} + \cdots$$

auch konvergiert.

Zu dem Zwecke führen wir neue Größen $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \ldots$ durch die Gleichungen ein:

$$\bar{b}_\tau = b_\tau, \text{ falls } 1 \lessgtr \tau \lessgtr \sigma - 1$$

und

$$\bar{b}_{\sigma+\nu} = b_{\sigma+\nu} + c_\nu' \text{ für } \nu \geqq 0.$$

Für die so definierten $\bar{b}_\nu$ gilt die Relation:

$$0 \lessgtr \bar{b}_\nu \lessgtr 2(g-1).$$

Die Gleichungen (I) gehen durch Einführung der Größen $\bar{b}_\nu$ über in:

$$\begin{aligned}
&b_0 c_0 + r_0 = a_0 \\
&b_0 c_1 + r_1 = g r_0 + a_1 - \bar{b}_1 c_0 \\
&b_0 c_2 + r_2 = g r_1 + a_2 - \bar{b}_2 c_0 - \bar{b}_1 c_1 \\
&\vdots \\
&b_0 c_\mu + r_\mu = g r_{\mu-1} + a_\mu - \bar{b}_\mu c_0 - \bar{b}_{\mu-1} c_1 - \cdots - \bar{b}_1 c_{\mu-1}.
\end{aligned}$$

Aus Gleichung:

$$b_0 c_\mu + r_\mu = g r_{\mu-1} + a_\mu - \bar{b}_\mu c_0 - \bar{b}_{\mu-1} c_1 - \cdots - \bar{b}_1 c_{\mu-1}$$

bzw.

$$b_0 c_\mu = g r_{\mu-1} + a_\mu - r_\mu - \bar{b}_\mu c_0 - \bar{b}_{\mu-1} c_1 - \cdots - \bar{b}_1 c_{\mu-1}$$

folgt:

$$b_0 |c_\mu| < g |r_{\mu-1}| + |r_\mu| + a_\mu + |\bar{b}_\mu c_0| + |\bar{b}_{\mu-1} c_1| + \cdots + |\bar{b}_1 c_{\mu-1}|.$$

Nach Voraussetzung ist:

$$a_\mu \leqq g-1,$$
$$\bar{b}_\nu \gtrless 2(g-1),$$
$$|r_\nu| \gtrless b_0 - 1.$$

Mithin ergibt sich:

$$b_0|c_\mu| < g(b_0-1) + b_0 - 1 + g - 1 + 2(g-1)(c_0 + |c_1| + \cdots + |c_{\mu-1}|).$$

Setzt man:

$$\frac{gb_0 + b_0 - 2}{b_0} = \alpha,$$
$$\frac{2(g-1)}{b_0} = \beta,$$

so ist:

$$|c_\mu| < \alpha + \beta(c_0 + |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{\mu-1}|).$$

Aus dieser Ungleichung folgt, wie dies bei „Lüroth“ S. 40 gezeigt wird:

$$|c_n| < (\alpha + \beta c_0)(1+\beta)^{n-1}.$$

Demnach konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty |c_n| \gamma^n$, falls die Reihe

$$\frac{\alpha + \beta c_0}{1+\beta} \sum_0^\infty (1+\beta)^n \gamma^n$$

konvergent ist, d. h. wenn

$$(1+\beta)\gamma < 1.$$

Dies verlangt:

$$\beta < g-1, \quad \text{also } \frac{2(g-1)}{b_0} < g-1$$

d. i.

$$b_0 > 2.$$

Das von Fourier angegebene Verfahren ist somit anwendbar, wenn

$$p + r > -\varrho \quad \text{und} \quad b_0 \geqq 3$$

ist.

Der einzige Unterschied des eben gegebenen Beweises gegenüber dem Beweis für die Fouriersche Division (siehe Lüroth“ S. 40) besteht darin, daß an Stelle der Größen b_ν, die der Ungleichung $0 \gtrless b_\nu \gtrless g-1$ genügen, die Größen $\bar{b}_\nu$ getreten sind, für die die Relation gilt:

$$0 \gtrless \bar{b}_\nu \gtrless 2(g-1).$$

Ganz ebenso verhält es sich auch mit denjenigen Überlegungen, die man an die Betrachtung des Restes anschließen kann, wie sie Herr Lüroth S. 45 u. f. für die Fouriersche Division durchgeführt hat. Auch hier bestände der einzige wesentliche Unterschied darin, daß an Stelle der Größen b_ν die $\bar{b}_\nu$ treten, d. h. es würde in den einzelnen Ungleichungen hier und

dort noch der Faktor 2, herrührend von $\bar{b}_r \leqq 2(g-1)$ anstatt $b_r \leqq g-1$, auftreten.

Wollte man demnach die genannten Betrachtungen wirklich durchführen, so könnte man sich an die Resultate bei „Lüroth“ halten und dieselben für unsern speziellen Fall umschreiben. Wir wollen deshalb darauf nicht näher eingehen.

Vergleichen wir die hier angegebene Methode zur Bestimmung der Wurzeln mit der früher entwickelten, so finden wir einen wesentlichen Unterschied.

Während die Wahl von c_0 früher an keine Grenzen gebunden war — wir konnten ja c_0 so groß nehmen, wie wir wollten — ist dies bei b_0 offenbar nicht mehr der Fall, denn es soll die Ungleichung bestehen:

$$p + r > -\varrho,$$

r und ϱ sind aber feststehende Größen, sobald einmal die Gleichung in bestimmter Form gegeben ist. Eine Vergrößerung von b_0 kommt dagegen darauf hinaus, daß man p verkleinert, und dies kann nur so lange geschehen, bis $p = -(r+\varrho) + 1$ geworden ist.

Gegeben sei z. B. die Gleichung:

$$x^2 + 0{,}00004\,x = 0{,}00003$$

$$x = \frac{0{,}00003}{0{,}00004 + x.}$$

Die positive Wurzel dieser Gleichung liegt zwischen 0,005 und 0,006. Es ist also:

$$r = 3, \quad \varrho = 3.$$

$p + r$ muß zum mindesten den Wert -5 haben, da man sonst $b_0 = 0$ erhalten würde.

Die Gleichung $p + r > -\varrho$ ist also nicht erfüllbar, da $-5 < -3$ ist, und man sieht auch leicht ein, daß tatsächlich in der angegebenen Weise ein Rechnen unmöglich ist.

Während sich also die in den §§ 1 bis 11 durchgeführte Methode für jede beliebige Gleichung anwenden läßt, ist dies bei dem zuletzt angegebenen Verfahren nur in ganz speziellen Fällen möglich.